

583/27228

T R A I T É
DU MOUVEMENT
DES PROJECTILES,
APPLIQUÉ
AU TIR DES BOUCHES A FEU.

Par le Citoyen JEAN - LOUIS LOMBARD,
Professeur aux Écoles d'Artillerie à Auxonne.



A DIJON,
DE L'IMPRIMERIE DE L. N. FRANTIN.
Et se vend, à AUXONNE,
Chez JEAN - ANTOINE - MARIE LOMBARD,
Professeur aux Écoles d'Artillerie.

AN V^e.

22. 1. 1882

AVERTISSEMENT

DU FILS DE L'AUTEUR (1).

LE *Traité du mouvement des Projectiles, appliqué au tir des bouches à feu*, est le fruit de longues méditations, de profondes connoissances dans la théorie de l'Artillerie & d'une expérience consommée dans la pratique de cet art. Déjà depuis long-temps cet ouvrage étoit achevé, & l'auteur en digéroit à loisir la correction sans appercevoir le moment où ses facultés, bornées aux appointemens de sa place, lui permettroient de le mettre au jour, lorsqu'il y a été déterminé par une gratification de 2000 liv. que lui a accordée le Gouvernement sur la fin de l'année 1793 (*vieux style*), pour subvenir aux frais de l'impres-

(1) Jean-Antoine-Marie LOMBARD, Professeur aux Écoles d'Artillerie, à Auxonne.

fion , à la charge d'en fournir vingt exemplaires à l'Ecole des élèves de l'Artillerie à Châlon-sur-Marne , & quatre exemplaires à chacune des Ecoles d'Artillerie.

Déjà les planches étoient gravées & imprimées , & l'impression de l'ouvrage étoit commencée , lorsque la mort , en frappant l'Auteur le 12 Germinal , an 2^e. (1^{er}. Avril 1794 , ère vulgaire) , dans la soixante-douzième année de son âge , est venue enlever à sa patrie un Philosophe éclairé , un excellent citoyen ; à sa famille un bon pere , un bon époux ; aux sciences , qu'il cultivoit avec passion , un savant modeste autant qu'il étoit laborieux & profond ; au cercle de ses amis & de ses connoissances , un homme de la plus douce , de la plus aimable société.

Si l'Artillerie sur-tout a à regretter en lui un Professeur distingué (témoignage qu'aimeront à rendre à sa mémoire la plu-

part des Officiers de ce Corps recommandable , qui , fideles à leur poste , paient aujourd'hui à la République le tribut des connoissances qu'ils ont acquises dans leur art) , au moins il n'est pas mort tout entier pour cet art , l'une des colonnes de la République.

Les nouveaux Principes de l'Artillerie de BENJAMIN ROBINS , commentés par EULER , traduit de l'Allemand , avec des notes (1).

Les Tables du tir des canons & des obusiers , avec une Instruction sur la manière de s'en servir , à l'usage des Officiers du Corps de l'Artillerie (2).

(1) *A Dijon* , chez L. N. FRANTIN , Imprimeur , 1783 , 1 gros vol. in-8°. & se trouve , à *Paris* , chez JOMBERT fils aîné , Libraire.

(2) 1787 , 1 vol. in-8°. à *Auxonne* , chez le citoyen LOMBARD fils.

L'Instruction sur la manœuvre & le tir du canon de bataille (1), suivie d'un traité sommaire sur la manière de servir le canon, extrait de celui des *Manœuvres de l'Artillerie*, par M. DEMEUVRE; ouvrage publié en faveur des Canoniers volontaires.

Enfin, le *Traité du mouvement des Projectiles, appliqué au tir des bouches à feu*.

Tels sont les ouvrages dans lesquels vit encore le citoyen *Lombard*, & qui assurent à sa mémoire une place parmi les hommes, qui, par leurs travaux, ont honoré les sciences en servant utilement leur pays.

Peut-être cet éloge paroîtra-t-il déplacé sous la plume d'un fils; mais chargé

(1) *Dole*, 1792, broch. in-8°. à *Auxonne*, *ibid.* & à *Dole*, chez le citoyen J. F. X. JOLY, Imprimeur-Libraire.

v

de suivre l'impression commencée du *Traité du mouvement des Projectiles*, & de mettre cet ouvrage au jour, je n'ai pu résister au desir de profiter de cette circonstance pour rendre un hommage public à la mémoire de son Auteur. Si cet hommage étoit le fruit de l'erreur, ce seroit celle de la piété filiale, & sous ce rapport, je me flatte qu'elle trouveroit grace.

Le coup qui m'a frappé, en retardant l'impression de l'ouvrage dont il s'agit, a rendu pour ainsi dire inutile le secours que le Gouvernement avoit accordé à mon pere pour en faire les frais. La force des circonstances a empêché que ce secours ait pu être employé à sa destination; mais j'ai dû multiplier les sacrifices pour remplir des engagements sacrés, & pour mettre à fin ce que mon pere avoit commencé, moins pour son utilité particuliere, que dans l'intention de concourir à la perfection d'un art dont les

progrès ont fait l'objet de ses recherches
& de ses méditations pendant tout le cours
de sa laborieuse carrière.



PRÉFACE.

P R É F A C E.

L'ORIGINE de l'Artillerie , si l'on prend ce terme dans son acception la plus étendue , remonte à la plus haute antiquité. L'usage des engins & des machines de guerre propres à lancer des traits , des pierres , des matieres combustibles , prit naissance plusieurs siècles avant l'ère vulgaire , & se perpétua jusqu'à l'époque où la poudre à canon fut employée, c'est - à - dire , suivant toutes apparences , jusques vers le commencement du quatorzième siècle ; il ne fut même entièrement abandonné , que lorsque l'emploi de la poudre à canon fut parvenu à avoir un succès décidé.

Quoique le génie ait présidé à l'invention des machines qui constituoient l'Artillerie ancienne ; quoiqu'il ait fallu de savantes combinaisons pour en assurer l'exécution ; quoiqu'elles ne fussent pas moins terribles dans leurs effets que ne le sont nos canons & nos mortiers (1) : il n'y a pas

(1) On peut prendre une idée de ce qu'étoit l'Artillerie ancienne , par ce qu'en a écrit *Plutarque*, vie de *Marcellus* , à l'occasion du siège mis par celui-ci devant *Syracuse* , & de la défense de cette ville , dirigée par *Archimedes*. Ce morceau est vraiment curieux.

pas d'apparence , malgré le sentiment du célèbre commentateur de Polybe , qu'elles reprennent jamais faveur. Toutes les nations , en adoptant exclusivement l'Artillerie moderne , s'attacheront à la porter au degré de perfection dont elle est susceptible ; elles préféreront un système d'Artillerie , qui n'a besoin d'autre moteur que la force expansive d'un fluide élastique.

Livré dans les premiers temps à une aveugle routine , on étoit loin de penser que le nouvel art pût être guidé dans sa pratique par des règles scientifiques. Deux cents ans s'étoient écoulés depuis sa naissance , avant qu'on eût imaginé qu'il pouvoit dépendre d'une théorie , moins encore d'une théorie fondée sur la géométrie.

En comparant la rapidité du mouvement des nouveaux projectiles avec la vitesse des masses lancées par les anciennes machines , on s'étoit faussement persuadé que ce mouvement commençoit & finissoit par être rectiligne , & que ces parties extrêmes étoient réunies par une courbe circulaire. Cette hypothèse , toute absurde qu'elle étoit , fut la base sur laquelle les premiers auteurs établirent une théorie de l'artillerie.

Ce ne fut que vers le commencement du seizième siècle , qu'on osa croire que le chemin

décrit par un boulet de canon , étoit une ligne courbe dans toute son étendue. On s'apperçut seulement que, dans la premiere partie de la course , la courbure étoit si peu sensible , qu'on pouvoit n'y avoir aucun égard ; mais la nature de cette courbe étoit toujours un mystere qu'un voile épais empêchoit encore de pénétrer. On soupçonna enfin qu'elle pouvoit avoir quelque analogie avec la parabole , sans pouvoir encore s'en convaincre par une démonstration mathématique. Ce ne fut que dans le siecle suivant que cette conjecture put se réaliser par la découverte que fit Gallilée de la loi de l'accélération des corps graves dans leur chute , qui termina les disputes qui s'étoient élevées touchant les loix du mouvement , spécialement celui des projectiles. Les géometres en firent l'application au mouvement parabolique , pour toutes les situations du but , par rapport au niveau de la batterie.

Gallilée , qui avoit aussi eu la premiere idée , au moins parmi les modernes , de la pesanteur de l'air & de la pression de l'atmosphère , ne manqua point de faire mention de la résistance que ce fluide pourroit opposer aux corps qui s'y meuvent : conjecture qui , mieux développée , eût dès-lors répandu le plus grand jour sur la théorie de l'Artillerie ; mais il attribua si peu

d'effet à cette résistance , qu'il n'hésita point d'affirmer qu'il n'en résulteroit aucun changement à la figure de la parabole. Cette opinion fut d'abord suivie par la plupart des auteurs qui traitèrent ensuite le même sujet. Il n'étoit pas vraisemblable , selon eux , qu'un fluide aussi délié , dont la densité est plusieurs milliers de fois moindre que celle des mobiles lancés par les bouches à feu , pût sensiblement altérer le mouvement parabolique ; en conséquence ils bornèrent leurs recherches à démontrer toutes les propriétés géométriques de ce mouvement , comme s'il s'exécutoit dans le vuide , même celles qui , inutiles pour la pratique , ne sont que de pure curiosité.

Enfin parut Newton , ce génie auquel les sciences physico-mathématiques ont tant d'obligations ; il réveilla l'attention des savans sur l'efficacité de la résistance de l'air , en prouvant que la considération de cet obstacle n'étoit point à négliger ; mais ce ne fut que long-temps après , que l'Artillerie , toujours lente dans ses progrès , profita d'une découverte qui auroit pu porter la théorie des corps projetés à son plus haut degré de perfection , si la nature des fluides en général , & de l'air en particulier , étoit

mieux connue. Malgré ce qui nous manque encore à cet égard , on a à présent des données suffisantes pour résoudre le problème le plus important d'Artillerie , celui par lequel , connoissant la force de la poudre , on propose de diriger une piece , de maniere que le boulet aille frapper un but de position connue. Il y a plus d'un siecle que ce problème a été proposé , il n'y a pas cinquante ans qu'il est résolu , & ce n'est que depuis une dizaine d'années que j'ai calculé des tables qui en présentent la solution pour tous les cas (1).

Ce n'est pourtant point encore là que doivent s'arrêter les connoissances qui caractérisent le vrai artilleur. Son art rangé aujourd'hui dans la classe des sciences , si nous parcourons la chaîne qui les lie entr'elles , nous en trouverons peu qui ne fournisse des regles & des principes pour en diriger les opérations avec certitude. Le chymiste , par une combinaison simple & ingénieuse de différentes substances , a créé le principal moteur de l'Artillerie : agent terrible , mais dont l'activité seroit , pour ainsi dire , sans effet , si le mé-

(1) *Table du tir des canons & des obusiers , avec une instruction sur la maniere de s'en servir.* 1 vol. in-8°. 1787.

tallurgiste n'eût indiqué le moyen de l'entraver dans plusieurs sens , pour décider son action à se porter vers un seul côté. Le physicien développe les ressorts qui constituent la force prodigieuse de la poudre; il assigne par de justes proportions à chacune des substances qui la composent , la part qu'elle peut avoir à ses effets; & en faisant connoître la nature des obstacles à vaincre , il fixe le rapport entre la puissance & la résistance. Le mécanicien trouve dans la science des machines & du mouvement , tout ce qui peut contribuer à simplifier les manœuvres de l'Artillerie , à vaincre les difficultés qui se présentent continuellement dans la pratique de cet art , & à assurer la solidité & l'uniformité des attirails. Enfin le géometre , guidé par la lumière émanée des autres sciences , soumet au calcul les notions qu'elles lui fournissent , trace dans les airs la route que doivent suivre les globes destructeurs lancés par les bouches à feu , & mesure le temps de leur course.

Mais , que dis-je ! l'artilleur , devenu lui-même chymiste, métallurgiste, physicien, mécanicien , géometre , n'a plus besoin de recourir à des secours étrangers , depuis qu'instruit dans les utiles établissemens , dont la France a donné l'exemple

à toute l'Europe , il est occupé pendant la paix à acquérir des connoissances en tout genre , & en perfectionnant son art , à se mettre en état de rendre pendant la guerre les services les plus signalés , qui le font regarder , à juste titre , comme le plus ferme soutien de l'état.

Rien ne peut mieux convaincre de l'utilité , même de la nécessité de ces connoissances dans un artilleur , qu'un coup d'œil sur les diverses fonctions qu'il est obligé de remplir.

En effet , comment veillera-t-il sur la fabrication des bouches à feu , s'il n'a point de notions sur l'art des fontes ; sur la meilleure forme des fourneaux de fusion ; sur l'alliage qui convient le mieux à chaque calibre ; sur la justesse des procédés par lesquels on parvient à la précision des dimensions ; sur l'usage des instrumens de vérification ?

Comment jugera-t-il dans une forge les travaux & les différentes opérations qui font passer le fer depuis la mine où il prend naissance , jusqu'à la forme qui le rend propre aux usages de l'Artillerie , s'il n'a fait une étude profonde de la minéralogie ? Comment décidera-t-il que des fers rempliront leur destination , s'il n'a pas acquis la science des moyens d'en reconnoître les

qualités , & d'en vérifier les dimensions ?

Pourra-t-il faire une réception justement motivée des armes blanches & à feu , s'il ignore quelles doivent être les propriétés de chacune des parties qui les composent , & s'il n'apperçoit pas les défauts qui doivent les faire rejeter ? Propriétés & défauts qu'on ne peut découvrir que par la connoissance parfaite des effets de la trempe & du recuit , qui rendent l'acier plus ou moins élastique ; des effets de la forge & du marteau , qui augmentent ou altèrent la qualité du fer.

Si nous suivons l'artilleur dans les ateliers où son devoir l'appelle pour diriger la construction des attirails , nous verrons que la précision , la solidité , l'uniformité doivent être les principaux objets de sa vigilance. La qualité des matériaux doit fixer son attention , & à tous égards , sa conduite doit porter le caractère du scrupule ; car , s'il y a une erreur , sur qui doit tomber la responsabilité ? Sur celui sans doute en qui le gouvernement a mis sa confiance , & qui , ou par un abus criminel , ou par ignorance , ou par négligence , auroit livré au service des effets dont les défauts pourroient entraîner les suites les plus funestes.

Je ne parlerai point des fonctions de l'artilleur en présence de l'ennemi, pour diriger l'exécution du tir des bouches à feu ; il se convaincra facilement , par la lecture du livre que je lui présente , que , sans le secours des mathématiques , il n'est possible ni de raisonner avec justesse , ni de pratiquer avec discernement cette partie de son art , la plus importante de toutes , & qui en est le complément ; il verra que le service peut souffrir par la perte d'un temps précieux , par une consommation inutile de munitions , si le flambeau de la théorie n'en éclaire , n'en accélère les opérations.

Cet ouvrage est divisé en deux sections.

La première, précédée de quelques notions préliminaires , qu'on a cru devoir rappeler au lecteur , traite du mouvement des projectiles dans le vuide. Plusieurs détails dans lesquels je suis entré , paroîtront peut-être superflus ; mais outre qu'ils ont donné lieu à des observations qui , dans tous les cas , peuvent avoir leur utilité , je les ai cru nécessaires pour achever de détruire le préjugé du mouvement parabolique , en ne laissant aucun doute sur la grande différence qui existe entre les résultats de cette théorie , & ceux que donne la considération de la résistance de l'air.

xvj

C'est de cette résistance & de ses effets sur le mouvement des projectiles , qu'il s'agit dans la seconde section.



TABLE

T A B L E

D E S M A T I E R E S.

<i>P</i> R I N C I P E S de trigonométrie.	Page 1
<i>Propriétés de la parabole.</i>	4
<i>Principes du recouvrement composé.</i>	5
SECTION I. Du mouvement des corps projetés	
<i> dans le vuide.</i>	9
<i>De l'angle de projection.</i>	12
<i>Lorsque le but est au dessus du niveau de la batterie.</i>	13
<i>Lorsqu'il est au dessous.</i>	15
<i>Lorsqu'il est de niveau.</i>	16
<i>De la force de projection.</i>	17
<i>Des deux angles sous lesquels on peut atteindre le même but avec la même vitesse.</i>	20
<i>De la durée du mouvement des projectiles.</i>	23
<i>Des amplitudes horizontales.</i>	24
<i>De la plus grande hauteur du jet.</i>	25
<i>Du tir du mortier.</i>	27
<i>De la force de projection de la poudre dans le mortier.</i>	30
<i>De la maniere d'observer le temps.</i>	33
<i>Du tir du canon.</i>	36
<i>De la vitesse du boulet.</i>	38

<i>Trouver l'angle de départ d'un boulet.</i>	42
<i>De la ligne de mire.</i>	47
TABLE I. <i>Des distances du point de rencontre de la ligne de mire avec l'axe suivant les différens calibres, avec les angles que la ligne de mire fait avec l'axe.</i>	50
TABLE II. <i>Des abaissemens de la ligne de mire au dessous de l'axe du canon.</i>	51
TABLE III. <i>Des abaissemens du boulet en différens temps.</i>	52
<i>De l'angle de projection.</i>	54
TABLE IV. <i>Des angles qui ont leur sommet au but, & s'appuient sur le demi-diametre de la bouche du canon.</i>	57
TABLE V. <i>Des haussimens de la ligne de mire, relativement aux angles qu'elle forme avec l'axe du canon.</i>	59
<i>Du tir du canon de but en blanc.</i>	64
<i>Du tir à ricochet.</i>	72
<i>Problème I.</i>	74
<i>Problème II.</i>	76
<i>Problème III.</i>	77
<i>Problème IV.</i>	78
SECTION II. <i>Du mouvement des projectiles dans l'air.</i>	83
<i>Théorie de la résistance des fluides.</i>	92
<i>Problème I.</i>	100

Problème II. 102

Problème III. *Ibid.*

Problème IV. 103

Problème V. *Ibid.*

TABLE VI. *Des diamètres & densités des boulets, bombes, obus & balles de plomb de 18 à la livre.* 105

Calcul de la formule $u = \frac{v}{m}$. *Ibid.*

Calcul de la formule $V = mu$. 106

Calcul de la formule $t = \frac{c}{v} (m - 1)$. *Ibid.*

Calcul de la formule $V = \frac{c}{t} (m - 1)$. 107

Calcul de la formule $m = \frac{vt}{c} + 1$. 108

Du tir du canon de but en blanc. 109

Calcul de la formule $V = \sqrt{\frac{15,1}{\text{tang. } I} \left(\frac{x}{c} + x \right)}$. 113

Calcul de la hausse. 114

Calcul de la formule $\text{tang. } I = \frac{15,1}{V^2} \left(\frac{x}{c} + x \right)$. *Ibid.*

Calcul de la formule

$$x = c \left[\sqrt{\left(\frac{V^2 \text{ tang. } I}{15,1 c} + \frac{1}{4} \right)} - \frac{1}{2} \right]. \quad 117$$

Calcul de la formule

$$x = \frac{c}{3} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{15,1} \frac{V^2}{c} \times \frac{m-n}{l} + 1 \right)} - 1 \right). \quad 123$$

Du tir à ricochet ou d'enfilade. 127

Effets de différentes vitesses initiales du boulet de 16 tiré à 250 toises. 134

De la force que différentes charges de poudre exercent dans le canon. 135

TABLE VII. *Des vitesses initiales résultantes de différentes charges.* 146

Remarque I. 148

Remarque II. 151

Remarque III. 155

Remarque IV. 158

TABLE VIII. *Des vitesses relatives à l'évasement des pièces.* 162

Remarque V. 167

Remarque VI. 170

Vitesse initiale du boulet de 16 chassé avec 6 livres de poudre. 171

Remarque VII. 175

Remarque VIII. 182

Du tir du fusil. 186

Dimensions du fusil. 187

TABLE IX. *Du tir du fusil d'infanterie.* 191

TABLE X. *Du tir du fusil d'artillerie.* 194

Du tir du mortier. 201

TABLE XI. *Des valeurs de n pour les douze espèces de trajectoires relatives au jet des bombes.* 213

TABLE XII. *Des valeurs de la quantité P.* 214

Calcul de la formule $c \sqrt{1 + \frac{n+Q}{n+P}}$, qui donne les arcs AN, AM. 215

Calcul des formules $c \cos. i \sqrt{1 + \frac{n+Q}{n+P}}$ & $c \sin. i \sqrt{\frac{n+Q}{n+P}}$, qui donnent les portions d'abscisses & d'ordonnées. 216

Calcul de la formule $\sqrt{2 k c g \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(n+p)}}}$, qui
donne la vitesse. 217

Calcul de la formule $\frac{2,302585 \sqrt{c}}{\sqrt{2 k g}} \cdot \frac{1}{h} l \frac{n+p}{n+p}$, qui
donne le temps employé à parcourir chaque portion
Nn & Mm de la courbe. 218

TABLE XIII. De la première espèce de trajectoire
des bombes. 221

TABLE XIV. Relative aux valeurs des quantités
qui se trouvent en tête de la table XIII, relative-
ment aux différentes espèces de bombes. 224

Méthode des interpolations. 226

TABLE XV. De la projection des bombes sous
l'angle de 45 degrés. 229

TABLE XVI. Des vitesses communiquées à chaque
espèce de bouches par différentes charges de poudre,
dont la qualité est de 104 toises, l'angle de pro-
jection étant de 45 degrés. 236

TABLE XVII. Des vitesses & des portées rectifiées
résultantes de différentes charges de poudre à chaque
espèce de bombes ; l'angle de projection étant de
45 degrés, & la poudre de 104 toises. 240

TABLE XVIII. Des vitesses des bombes résultantes
de différentes charges de poudre, dont la qualité
est indiquée par les portées du mortier à éprouver
les poudres, chargé de 3 onces. 242

Des causes d'irrégularités dans le tir des mortiers. 244

TABLE XIX. *Force d'impulsion directe du vent
contre une surface d'un pied quarré.* 247

TABLE XX. *Hauteur de la chute des graves.* 248

APPENDICE. *Réflexions sur les chambres des
mortiers.* 249

Fin de la Table.



T R A I T É

DU MOUVEMENT

DES CORPS PROJÉTÉS.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

PRINCIPES DE TRIGONOMÉTRIE.

1. *La tangente d'un angle étant représentée par t , le rayon des tables étant $= 1$, le sinus de cet angle sera $= \sqrt{\frac{t}{1+t^2}}$, & le sinus d'un angle double $= \frac{2t}{1+t^2}$.*

Soit AD la tangente de l'angle ACD (fig. 1), & l'angle ACE double de l'angle ACD; menez la corde AE, la sécante CD & le sinus EB de l'angle ACE; AF moitié de AE fera le sinus de l'angle ACD, & la sécante CD sera $= \sqrt{1+t^2}$. Les triangles semblables CAD, CFA donnent CD : AD :: CA : AF, ou $\sqrt{1+t^2} : t :: 1 : AF = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$; les triangles semblables CAD, EBA donnent CD : CA :: AE ou 2 AF : EB; ou $\sqrt{1+t^2} : 1 :: \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} : EB = \frac{2t}{1+t^2}$.

2. *La tangente d'un angle est réciproquement comme sa cotangente.*

Soit le quart de cercle CAB (fig. 2), AD la tangente de l'angle ACD, BE sa cotangente : les triangles

semblables CAD, EBC donnent $AD : AC :: BC : BE$, ou $t : 1 :: 1 : \cot$, donc $t = \frac{1}{\cot}$. Donc si la tangente d'un angle est exprimée par une fraction $\frac{m}{n}$, la cotangente sera exprimée par la fraction inverse $\frac{n}{m}$; & le logarithme de la tangente d'un angle est le complément arithmétique du logarithme de la cotangente. Si, par exemple, 9,5843722 est le log. tang. d'un angle, 10,4156278 sera le log. cot. du même angle.

3. *La sécante d'un angle est réciproquement comme son cosinus.*

Les triangles semblables CAD, CFG (fig. 2) donnent $CD : CA :: CG : CF$, ou $\sec : 1 :: 1 : \cos$, donc $\sec = \frac{1}{\cos}$. Le cosinus d'un angle étant donc exprimé par une fraction $\frac{p}{q}$, la sécante du même angle sera exprimée par la fraction inverse $\frac{q}{p}$. Donc aussi le logarithme de la sécante d'un angle est le complément arithmétique du logarithme cosinus de cet angle. Si, par exemple, 9,6804790 est le log. cos. d'un angle, 10,3195210 sera le log. sec. du même angle. Ainsi, quoique les log. sec. ne se trouvent point dans certaines tables, comme dans les grandes de Gardiner & dans celles de la Caille, on pourra néanmoins employer ces tables pour avoir les log. sec, en prenant les complémens arithmétiques des log. cosinus.

4. *La cosécante d'un angle est réciproquement comme son sinus.*

Les triangles semblables BCE, GFC donnent $CE : BC :: CG : FG$, ou $\text{cosec} : 1 :: 1 : \sin$, donc $\text{cosec} = \frac{1}{\sin}$; ce qui donne lieu aux mêmes observations qu'on a faites dans les deux articles précédens.

Les propriétés trigonométriques du triangle rectangle donnent (fig. 3)

5. $AC : CB :: 1 : \text{tang. } A = \frac{CB}{AC}$, donc $CB = AC \text{ tang. } A$. C'est-à-dire que dans tout triangle rectangle la tangente de l'un des angles aigus est égale au côté opposé à cet angle divisé par le côté adjacent, & qu'un côté opposé à un angle est égal à l'autre côté multiplié par la tangente de cet angle.

6. $AB : BC :: 1 : \sin. A = \frac{BC}{AB}$; donc $BC = AB \sin. A$. C'est-à-dire que le sinus d'un des angles aigus est égal au côté qui lui est opposé divisé par l'hypothénuse, & qu'un des côtés de l'angle droit est égal à l'hypothénuse multipliée par le sinus de l'angle opposé à ce côté.

7. $AB : AC :: 1 : \cos. A = \frac{AC}{AB}$, donc $AC = AB \cos. A$. C'est-à-dire que le cosinus de l'un des angles aigus est égal au côté adjacent divisé par l'hypothénuse, & que l'un des côtés de l'angle droit est égal à l'hypothénuse multipliée par le cosinus de l'angle adjacent à ce côté.

8. La tangente d'un angle est égale au sinus de cet angle divisé par son cosinus.

Les triangles semblables CFG, CAD donnent $CF : EG :: CA : AD$ ou $\cos : \sin :: 1 : t$, donc $t = \frac{\sin}{\cos}$.

9. Donc par le §. 2 on a $\cot. = \frac{\cos}{\sin}$.

La trigonométrie fournit encore les équations suivantes.

$$10. \sin. (a \pm b) = \sin. a \cos. b \pm \cos. a \sin. b.$$

$$11. \cos. (a \pm b) = \cos. a \cos. b \mp \sin. a \sin. b.$$

$$12. t (a + b) = \frac{t a + t b}{1 - t a t b}.$$

$$13. t (a - b) = \frac{t a - t b}{1 + t a t b}.$$

$$14. \cot. (a + b) = \frac{1 - t a t b}{t a + t b}.$$

$$15. \cot. (a - b) = \frac{1 + \tan a \tan b}{\tan a - \tan b}.$$

16. La somme de la tangente & de la sécante d'un arc AB (fig. 4) est égale à la tangente de $45^\circ + \frac{1}{2} AB$.

Soit le complément BD de cet arc divisé en deux également en F, AG & CG étant tangente & sécante de l'arc AB, si on mène le rayon CD, & par le point F la droite CT terminée par la tangente prolongée en T, le triangle CGT sera isoscele, puisque les angles T, GCT sont égaux chacun à l'angle DCF, donc AT ou AG + GT = AG + GC. Mais AT est la tangente de l'arc AF, lequel considéré avec l'arc DF comme formant ensemble l'arc AD ou 90° degrés; il est évident qu'on aura $AF = 45^\circ + \frac{1}{2} AB$, donc $\tan. AF = \tan. AB + \sec. AB = \tan. (45^\circ + \frac{1}{2} AB)$.

17. La différence des tangentes de deux angles a & b est plus grande que la tangente de leur différence.

On vient de voir (§. 13) que $\tan (a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$, or il est évident que $\tan a - \tan b > \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$; donc aussi $\tan a - \tan b > \tan (a - b)$.

Propriétés de la parabole.

18. Les perpendiculaires BD, GH (fig. 5) sur une double ordonnée AC d'une parabole AMC, sont proportionnelles aux produits des parties qu'elles coupent sur cette double ordonnée.

Menez l'axe PM de la parabole & les ordonnées DR, HS, on a $MP : MR :: \overline{PC}^2 : \overline{RD}^2$ ou $\overline{PB}^2$; donc $MP - MR$ ou $BD : MP :: \overline{PC}^2 - \overline{PB}^2 : \overline{PC}^2$, on démontre de même que $GH : MP :: \overline{PC}^2 - \overline{PG}^2 : \overline{PC}^2$; donc $BD : GH :: \overline{PC}^2 - \overline{PB}^2 : \overline{PC}^2 - \overline{PG}^2$. Or $\overline{PC}^2 -$

$\overline{PB}^2 = AB \times BC$ & $\overline{PC}^2 - \overline{PG}^2 = AG \times GC$,
donc &c.

Si l'on fait $AP = PC = y$; $PM = x$; $AB = b$;
 $BD = c$; $AG = d$ & $GH = f$; on aura $BC = 2y - b$ & $GC = 2y - d$. La dernière proportion donne $c : f :: 2by - bb : 2dy - dd$, d'où l'on tire $y = \frac{cd - bbf}{2c - 2b}$,
ce qui donne la valeur AP quand on connoît les perpendiculaires BD, GH & leurs distances au point A. On trouve aussi par l'une des premières proportions $c : x :: 2by - bb : yy$, donc $x = \frac{cyy}{2by - bb}$, ce qui fait connoître l'axe MP.

19. *Les tangentes des angles formés par deux tangentes à la parabole & les ordonnées menées aux points touchans, sont entre elles comme ces ordonnées.*

En supposant le rayon $= 1$, on a (fig. 6) $\text{tang. N} = \frac{QD}{QN}$ (§. 5) $= \frac{AQ}{QN}$, & $\text{tang. M} = \frac{PT}{PM} = \frac{AP}{PM}$; donc
 $\text{tang. N} : \text{tang. M} :: \frac{AQ}{QN} : \frac{AP}{PM}$, mais $AQ : AP :: \overline{QN}^2 : \overline{PM}^2$, donc $\text{tang. N} : \text{tang. M} :: \overline{QN}^2 : \overline{PM}^2 :: QN : PM$.

Les autres propriétés de la parabole que nous aurons occasion d'employer sont trop connues pour qu'il soit nécessaire de les rappeler ici.

SUR LE MOUVEMENT COMPOSÉ.

20. *Si un corps est sollicité à se mouvoir par deux puissances dont les directions forment un angle, à la fin d'un tems quelconque ce corps se trouvera à l'extrémité de la diagonale du parallélogramme construit sur les espaces, que chacune*

de ces puissances, si elle eût agi seule, lui auroit fait parcourir dans le même tems.

Soit le corps A (fig. 7) poussé par les forces réunies des deux puissances P & Q : supposons que la première P dirigée suivant A B lui fasse parcourir les espaces A E, A F, A B dans les mêmes tems que l'autre Q, dirigée suivant A C, lui feroit parcourir les espaces A G, A H, A C. Pour que ces deux puissances produisent sur le mobile tout l'effet dont elles sont capables en conséquence de leurs directions & de la quantité de force qu'elles exercent, il faut qu'en vertu de l'impulsion de la puissance P, le mobile s'éloigne de la direction A C de l'autre puissance Q, d'une quantité A E prise sur A B, ou parallèlement à A B, en même tems que la puissance Q l'éloigne de la direction A B d'une quantité A G prise sur A C, ou parallèlement à A C. Or cela ne peut avoir lieu qu'autant qu'à la fin du même tems le mobile se trouvera en un point I déterminé par la rencontre des deux droites E I, G I, menées parallèlement aux directions des deux puissances, & ce point est évidemment l'extrémité de la diagonale du parallélogramme construit sur les espaces A E, A G, que chacune des puissances, si elle agissoit seule, feroit parcourir au mobile dans le même tems; il en est de même des points K, D, où le mobile doit se trouver à la fin des tems qu'il auroit mis à parcourir les espaces A F, A B, si la puissance P agissoit seule, ou les espaces A H, A C, si la puissance Q agissoit seule.

21. Si les parties A E, E F, F B (fig. 7) &c. prises sur la direction A B, sont infiniment petites, ainsi que les parties A G, G H, H C de la direction A C; les points A, I, K, D, par où passe le mobile, seront infiniment proches l'un de l'autre : ils traceront le chemin que le mobile par-

court pendant son mouvement ; & ce chemin sera une ligne droite, ou une ligne courbe dont la nature dépend du rapport qu'il y a entre les espaces AE , AF , AB parcourus en vertu de l'action de la puissance P , & les espaces AG , AH , AC parcourus dans les mêmes tems, en vertu de l'action de la puissance Q .

22. Si les deux puissances P & Q (fig. 8) impriment au corps A un mouvement uniforme, ou des mouvemens semblablement variés, le chemin que le mobile parcourt sera une ligne droite; car il est clair que dans chacun de ces deux cas, on aura toujours $AG : AH : AC :: AE : AF : AB :: GI : HK : CD$.

23. Enfin si le mobile reçoit de la puissance P un mouvement uniforme, & de la puissance Q un mouvement uniformément accéléré, le chemin $AIKD$ (fig. 7) qu'il parcourt est une parabole. C'est le cas du mouvement d'un corps projeté dans le vuide: parce que la force de projection communique au mobile un mouvement uniforme, & que la pesanteur qui agit toujours sur lui est une force uniformément accélératrice. Mais nous présenterons cette vérité sous une autre forme, plus propre à faire connoître routes les circonstances du mouvement des corps projetés, après que nous aurons encore établi le principe suivant.

24. *Si un corps est projeté suivant une direction quelconque parallele ou oblique à l'horizon, il parcourra une courbe qui a cette direction pour tangente; des droites paralleles à la même direction pour ordonnées; & pour diametre la verticale qui passe par le point d'où le corps est projeté.*

1°. De quelque côté qu'on projette le corps A (fig. 9) dans la direction Qq , de A vers Q , ou de A vers q , la

pesanteur agissant continuellement sur lui, l'abaisse au dessous de la droite Qq aussi-tôt qu'il a quitté le point A d'où il est projeté; donc la direction Qq ne rencontre qu'en un seul point A la courbe MAm que le corps parcourt, elle est donc tangente à cette courbe.

2°. Comme la pesanteur agit également dans des tems égaux, en prenant de part & d'autre du point A des espaces égaux AQ , Aq , & qui seroient parcourus en tems égaux en vertu de la même force d'impulsion, les abaissemens verticaux QM , qm seront aussi égaux entr'eux, de sorte que la droite Mm qui joint les extrémités de ces abaissemens sera parallele à Qq , & sera par conséquent une double ordonnée de la courbe MAm .

3°. Enfin la verticale AP , menée par le point A , divisant Qq en deux également, divisera de même la parallele Mm , & sera par conséquent un diametre de la courbe.

25. Un projectile lancé par un canon AB (fig. 10), ou par une arme à feu quelconque, parcourt donc une courbe AM qui, en ne considérant que le centre du projectile, a pour tangente l'axe du canon ou sa direction AQ , le point touchant étant à la bouche. Et puisque la pesanteur qui agit continuellement sur le projectile a une direction verticale, la courbe AM & la direction AQ du canon sont dans un même plan vertical.



SECTION I.

Du mouvement des corps projetés dans le vuide.

26. SUPPOSONS qu'un corps placé en A (fig. 11) soit projeté suivant une direction AC, avec une vitesse égale à celle qu'il auroit acquise en tombant librement de la hauteur HA : ce corps parcourroit la droite AC s'il n'étoit point pesant; mais la pesanteur, qui ne cesse d'agir sur lui, l'éloigne continuellement de cette direction, & dans le même tems qu'il auroit parcouru l'espace AQ, elle l'abaisse d'une certaine quantité QM, dont la grandeur dépend du tems employé à parcourir AQ. Les espaces HA, QM étant parcourus, en vertu de la pesanteur, d'un mouvement uniformément accéléré, les vitesses acquises à la fin de ces espaces sont comme les racines carrées de ces mêmes espaces; c'est-à-dire comme $\sqrt{HA}$ est à $\sqrt{QM}$. Or les espaces qui seroient parcourus d'un mouvement uniforme avec ces mêmes vitesses & dans le même tems, sont AQ & 2QM; on a donc $AQ : 2QM :: \sqrt{HA} : \sqrt{QM}$. Faisant $AH = a$; $AQ = u$, & $QM = z$; on aura $u : 2z :: \sqrt{a} : \sqrt{z}$; d'où l'on tire $uu = 4az$.

27. On voit donc, 1°. que la courbe AMB est une parabole; car si l'on acheve le parallélogramme AQMR, RM sera une ordonnée de la courbe (§. 24), AR une abscisse, & l'équation $uu = 4az$ indique que $RM = AR \times 4AH$; c'est-à-dire que le carré de l'ordonnée est égal au produit de l'abscisse par une ligne constante, propriété qui ne convient qu'à la parabole. 2°. L'axe de cette parabole est vertical & divise l'horizontale AB en deux

également. 3°. La grandeur constante $4AH = 4a$, est le parametre du diametre AR; ainsi la hauteur dont un mobile devoit tomber pour acquérir la vitesse avec laquelle il doit être projeté pour décrire une parabole donnée, est égale au quart du parametre du diametre qui passe par le point de projection.

28. Pour tirer de l'équation $uu = 4az$ des conséquences utiles à la pratique, il faut la changer en une autre qui exprime le rapport des perpendiculaires PM menées de chaque point de la parabole sur l'horizontale AB, avec leurs distances AP au point A, & avec l'angle CAB sous lequel le mobile est projeté; c'est-à-dire qu'il faut rapporter les points de la courbe à l'horizontale AB. Pour cela on fera $AP = x$; $PM = y$, & l'on supposera que la direction AC fait avec l'horizontale AB un angle dont la tangente $= t$, le rayon ou sinus total étant $= 1$. On aura $PQ : AP$ ou $PQ : x :: t : 1$, donc $PQ = tx$; mais $QM = PQ - PM$, & $\overline{AQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2$; donc $z = tx - y$; & $uu = xx + ttxx$; mettant ces valeurs de z & uu dans l'équation $uu = 4az$, on aura $xx + ttxx = 4atx - 4ay$, qui est l'équation générale de la courbe AMB rapportée à l'horizontale AB (*).

(*) On trouve la même équation de la maniere suivante: considérons le mobile projeté parcourant l'élément Mm de la courbe qu'il décrit (fig. 11 *); abaïssons les droites MP , mp perpendiculaires, & MR parallele à l'horizontale AP qui passe par le point de projection A. Faisons $AP = x$, $PM = y$, le tems employé à parcourir $AM = t$; le mouvement suivant Mm étant décomposé en deux autres, l'un horizontal suivant MR , l'autre vertical suivant mR , la vitesse dans le premier sens qui sera $\frac{dx}{dt}$ n'est sujette à aucune

Cette équation renferme tout ce qu'il est nécessaire de considérer dans le mouvement des projectiles lancés par les bouches à feu, savoir : la quantité a pour exprimer la force du jet, d'où résulte la vitesse du projectile & la charge qu'il faut employer; la quantité t , par laquelle on trouve l'angle sous lequel il faut tirer; x & y indiquent la situation du but qu'on veut atteindre, ou ses distances horizontale & verticale. Nous allons entrer dans le détail des différens usages que l'on peut faire de cette équation.

altération, & la vitesse dans le second sens est $\frac{dy}{dt}$; celle-ci est diminuée par l'action de la pesanteur qui tend à abaisser le mobile. Nommant donc g la force instantanée de la gravité, on aura $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$, & $d\left(\frac{dy}{dt}\right) = -g dt$. L'intégration de ces deux équations donne en ajoutant les constantes, $\frac{dx}{dt} = C$, $\frac{dy}{dt} = C' - gt$. Déterminons ces constantes en observant qu'à l'origine du mouvement en A où la vitesse de projection est V , la vitesse horizontale est $= V \cos. I$, nommant I l'angle de projection, & la vitesse verticale est $= V \sin. I$; donc $\frac{dx}{dt} = V \cos. I$, & $\frac{dy}{dt} = V \sin. I - gt$; d'où l'on tire $dx = V dt \cos. I$ & $dy = V dt \sin. I - g t dt$; intégrant de nouveau on a $x = V t \cos. I$ & $y = V t \sin. I - \frac{g t^2}{2}$; prenant dans la première équation la valeur de $t = \frac{x}{V \cos. I}$ & substituant dans la seconde, on a $y = \frac{x \sin. I}{\cos. I} - \frac{g x^2}{2 V^2 \cos.^2 I}$, équation à la parabole. Soit maintenant a la hauteur due à la vitesse V & g l'effet de la pesanteur en une seconde, on aura $\frac{2 V^2}{g} = 4 a$; observant ensuite que $1 = \sin.^2 I + \cos.^2 I$ donne $x^2 = x^2 \sin.^2 I + x^2 \cos.^2 I$, on trouvera $y = \frac{x \sin. I}{\cos. I} - \frac{x^2 \sin.^2 I}{4 a \cos.^2 I} - \frac{x^2 \cos.^2 I}{4 a \cos.^2 I}$, d'où l'on tire $x^2 \tan g.^2 I + x^2 = 4 a x \tan g. I - 4 a y$, parce que $(\S. 8) \tan g. I = \frac{\sin. I}{\cos. I}$.

29. Nous nommerons *amplitude* ou *portée horizontale*, la distance à laquelle le mobile est porté sur le plan horizontal qui passe par le point d'où il est parti; ce point sera appelé *point de départ*, *point de projection*, ou bien on le désignera sous le nom de *batterie*; l'autre extrémité de l'amplitude, ou plus généralement l'endroit où le projectile tombe à terre, s'appellera *point de chute*; la *courbe de projection* est le chemin que le mobile parcourt dans sa course; on la nomme aussi *trajectoire*. La *ligne de projection*, ou la *première direction* du mobile est celle qu'il tend à suivre au premier instant de son mouvement. L'*angle de projection* est celui que la première direction du mobile fait avec la ligne horizontale. Si d'un point M (fig. 11) on abaisse une perpendiculaire MP sur l'horizontale AB qui passe par le point de projection A, AP est la *distance horizontale* du point M au point A, & MP en est la *distance verticale*; soit que ce point M soit au dessus de l'horizontale AB, ou au dessous de cette ligne.

De l'angle de projection.

30. Soit B le but que l'on veut atteindre avec un projectile qui part du point A, & dont la vitesse est égale à celle qu'il auroit acquise en tombant librement d'une hauteur $= a$: la distance horizontale AE du but, & la distance verticale BE devant être connues, on pourra nommer la première b , la seconde c , & mettre ces lettres dans l'équation à la place de x & y ; on aura $bb + bbt = 4abt - 4ac$, équation du second degré par rapport à la quantité t , d'où l'on tire $t = \frac{2a}{b} + \frac{1}{b} \sqrt{4aa - bb - 4ac}$, pour la tangente de l'angle de projection CAE.

Le but qu'on se propose d'atteindre peut avoir trois

positions différentes par rapport au point de projection A : il peut être situé au dessus de l'horizontale qui passe par ce point, comme dans la fig. 12 ; au dessous de cette horizontale, comme dans la fig. 13 ; ou sur l'horizontale même, c'est-à-dire au niveau de la batterie A, comme dans la fig. 14. Nous allons appliquer notre équation à chacun de ces trois cas.

Première position du but

31. *Lorsqu'il est au dessus du niveau de la batterie.*

Fig. 12.

Dans cette situation du but B à l'égard du point de projection A, le mobile pourra l'atteindre en partant suivant deux directions différentes : l'une formant avec l'horizontale AE un angle CAE dont la tangente $= \frac{2a}{b} + \frac{1}{b} \sqrt{4aa - bb - 4ac}$; & l'autre un angle cAE dont la tangente $= \frac{2a}{b} - \frac{1}{b} \sqrt{4aa - bb - 4ac}$. Sur quoi l'on observera qu'il n'est possible d'atteindre un but dont la situation est déterminée par les quantités b, c ; la vitesse du projectile l'étant par a , que lorsque $4aa - 4ac$ est plus grand que bb , ou que ces deux grandeurs sont au moins égales entre elles. Car si $4aa - 4ac$ étoit moindre que bb , la quantité $4aa - 4ac - bb$ feroit négative, & sa racine par conséquent imaginaire ; ce qui feroit voir qu'il n'y a point d'angle sous lequel on puisse atteindre le but B avec les conditions qui donneroient $4aa - 4ac < bb$. Si l'on avoit $4aa - 4ac = bb$, la grandeur radicale $\sqrt{4aa - 4ac - bb}$ feroit $= 0$, & l'on n'auroit pour la tangente t qu'une seule valeur $\frac{2a}{b}$; c'est-à-dire que dans ce dernier cas, on ne pourroit atteindre le but

B que suivant une seule direction qui feroit avec l'horizontale un angle dont la tangente $= \frac{2a}{b}$.

Exemple I. On propose d'atteindre un but B dont la distance horizontale AE est de 300 toises ou 1800 pieds; la hauteur verticale BE de 120 pieds; la vitesse du projectile étant de 360 pieds par seconde: dans ce cas l'on a $b = 1800$, $c = 120$ & $a = 2160$ (*) substituant ces valeurs dans l'équation $t = \frac{2a}{b} \pm \frac{1}{b} \sqrt{4aa - 4ac - bb}$ on aura $t = 4,50713$ & $t = 0,29288$. La première de ces deux valeurs est la tangente d'un angle de $77^\circ 29'$; & la seconde, celle d'un angle de $16^\circ 19'$. On peut donc atteindre le but proposé sous chacun de ces deux angles.

Exemple II. Si avec une vitesse de 300 pieds par seconde, on veut atteindre un objet éloigné de 2700 pieds, & élevé de 285 pieds; on trouvera $4aa - 4ac - bb = 0$, & $\frac{2a}{b} = \frac{3000}{2700} = 1,11111$ pour la tangente du seul angle de $48^\circ 1'$ environ, sous lequel le mobile doit être projeté, pour qu'il arrive au but proposé.

Exemple III. Enfin si avec la même vitesse de 300 pieds par seconde, & à la même distance horizontale de 2700 pieds, le but est plus élevé que de 285 pieds, on trouvera que $4aa - 4ac - bb$ est une quantité négative, & sa racine par conséquent imaginaire; ce qui fait voir que cette situation du but ne permet pas qu'on l'atteigne avec la vitesse donnée.

(*) Nous supposons dans cette première section qu'un corps parcourt 15 pieds dans la première seconde de sa chute. Il n'en résultera aucun inconvénient pour la pratique, & les calculs en seront plus simples.

Seconde position du but

32. *Lorsqu'il est au dessous du niveau de la batterie.*

Fig. 13.

Pour appliquer notre équation à ce second cas, il n'y a qu'à changer le signe du terme $4ac$ où se trouve la quantité c , & l'on aura $t = \frac{2a}{b} \pm \frac{1}{b} \sqrt{4aa + 4ac - bb}$; on pourra donc atteindre le but sous deux angles, dont l'un a pour tangente $\frac{2a}{b} + \frac{1}{b} \sqrt{4aa + 4ac - bb}$, & l'autre $\frac{2a}{b} - \frac{1}{b} \sqrt{4aa + 4ac - bb}$. Observons encore que pour la possibilité il faut que $4aa + 4ac$ soit $>$ ou $= bb$; & que dans le cas de $4aa + 4ac = bb$, le projectile ne peut arriver au but qu'en partant sous un angle dont la tangente $= \frac{2a}{b}$.

Il peut arriver aussi que la quantité $\sqrt{4aa + 4ac - bb}$ soit plus grande que $2a$, alors la tangente $\frac{2a}{b} - \frac{1}{b} \sqrt{4aa + 4ac - bb}$ seroit négative, & feroit voir que la première direction doit passer au dessous de l'horizontale A E.

Exemple I. Si le projectile doit frapper un but éloigné horizontalement de 1200 pieds, & de 150 pieds plus bas que le point de projection, sa vitesse étant de 180 pieds par seconde; on fera $b = 1200$; $c = 150$ & $a = 540$; lesquelles valeurs étant substituées dans l'équation $t = \frac{2a}{b} \pm \frac{1}{b} \sqrt{4aa + 4ac - bb}$, donneront $t = 1,087083$, & $t = 0,712917$, pour les tangentes des deux angles sous lesquels on peut atteindre le but proposé: la première répond à un angle de $47^\circ 23'$, & la seconde à un angle de $35^\circ 29'$.

II. Si à la même distance horizontale le but est abaissé

de 126 pieds $\frac{2}{3}$, on trouvera, en supposant la même vitesse, $t = \frac{2a}{b} = 0,9$ pour la tangente du seul angle d'environ 42° , qu'on puisse employer dans ce cas.

III. Si les valeurs de a & de b restent les mêmes, & que c soit moindre que 126 pieds $\frac{2}{3}$, on trouvera qu'il est impossible d'atteindre le but.

IV. Enfin si $b = 600$; $c = 200$ & $a = 540$, on aura $t = 3,65472$ & $t = -0,05472$. La première de ces tangentes est positive & fait voir qu'on atteindra le but proposé en dirigeant la ligne de projection au dessus de l'horizontale AE sous un angle d'environ $74^\circ 42'$. La seconde est négative, ce qui indique que cette même ligne doit être dirigée au dessous de l'horizontale, en faisant avec elle un angle de $3^\circ 8'$.

Troisième position du but

33. *Lorsqu'il est au niveau de la batterie.* Fig. 14.

Lorsque le but B est sur l'horizontale qui passe par le point A, la distance verticale BE devient nulle, on a $c = 0$, & l'équation $t = \frac{2a}{b} \pm \frac{1}{b} \sqrt{4aa + 4ac - bb}$ se change en celle-ci, $t = \frac{2a}{b} \pm \frac{1}{b} \sqrt{4aa - bb}$. Où l'on peut voir encore qu'il n'est possible d'atteindre le but que lorsqu'on a $2a >$ ou $= b$, & que dans le cas de $2a = b$, on ne peut employer qu'un seul angle de projection dont la tangente $= \frac{2a}{b} = 1$, c'est-à-dire l'angle de 45 degrés.

Exemple I. Si l'on propose d'atteindre un but éloigné de 1800 pieds, avec un projectile dont la vitesse est de 300 pieds par seconde; on aura $a = 1500$ & $b = 1800$. Mettant ces valeurs dans l'équation $t = \frac{2a}{b} \pm \frac{1}{b}$

$\sqrt{4aa - bb}$, on trouvera $t = 3$ & $t = 0,33333$ pour les tangentes demandées qui répondent, la première à un angle de $71^{\circ} 34'$ & la seconde à un angle de $18^{\circ} 26'$, sous chacun desquels on peut atteindre le but proposé.

II. Si le but est à 3000 pieds, la vitesse étant la même, on trouvera $t = 1$; c'est la tangente de 45 degrés, qui est le seul angle qu'on puisse employer dans ce cas.

III. Si le but est à plus de 3000 pieds, il ne sera pas possible de l'atteindre en employant une vitesse de 300 pieds par seconde, parce que $2a$ étant, dans ce cas, moindre que b , $\sqrt{4aa - bb}$ est une grandeur imaginaire.

Les deux angles sous lesquels le mobile parvient au même but avec la même vitesse, ont dans chacune des trois positions une propriété commune qu'on pourroit déduire immédiatement de la formule $\frac{2a}{b} \pm \frac{1}{b} \sqrt{4aa \mp 4ac - bb}$; mais nous découvrirons cette propriété par une méthode plus facile, dont nous parlerons après avoir considéré la force de projection.

De la force de projection.

34. Pour connoître la force de projection représentée par la lettre a , connoissant l'angle de départ & la situation du but; on reprendra l'équation générale $bb + bbtt = 4abt + 4ac$, d'où l'on tire les trois valeurs suivantes de a , relativement aux trois positions du but.

$$a = \frac{bb + bbtt}{4bt - 4c} \text{ pour la première position du but.}$$

$$a = \frac{bb + bbtt}{4bt + 4c} \text{ pour la seconde.}$$

$$a = \frac{bb + bbtt}{4bt} = \frac{b + btt}{4t} \text{ pour la troisième.}$$

La quantité a étant connue par ces trois équations, il sera facile d'en déduire la vitesse du projectile, puisqu'elle

est due à la hauteur a , & qu'elle est exprimée par $\sqrt{60 a}$.

35. Il est évident que la quantité a ne devant point être infinie, & encore moins négative, puisqu'il en résulteroit une vitesse imaginaire; il faut que, pour la première position du but, la tangente t de l'angle de projection soit plus grande que $\frac{c}{b}$ qui est la tangente de l'angle BAE (§. 4); & si dans la seconde position la première direction du mobile passe au dessous de l'horizontale AE, ce qui rend t négatif, il faut que t soit moindre que $\frac{c}{b}$.

Si la projection se fait sous l'angle constant de 45 degrés, on aura $t = 1$, & les trois valeurs de a deviendront

$$a = \frac{bb}{2b - 2c} \text{ pour la première position du but.}$$

$$a = \frac{bb}{2b + 2c} \text{ pour la seconde.}$$

$$a = \frac{1}{2} b \text{ pour la troisième.}$$

Exemple I. On demande quelle doit être la vitesse du projectile pour qu'il puisse atteindre un but dont la distance horizontale est de 250 toises ou 1500 pieds, son élévation au dessus du niveau de la batterie de 240 pieds, & l'angle de projection de 40 degrés? Ces conditions donnent $b = 1500$; $c = 240$, & $t = 0,8390996$, ou, en employant les logarithmes, $lb = 3,1760913$, $lc = 2,3882112$, $lt = 9,9238135$, & $l(1+t) = 0,2314920$. Ces valeurs étant mises dans l'équation $a = \frac{bb + bbt}{4bt - 4c}$ $= \frac{bb(1+t)}{4bt - 4c}$ on aura la vitesse du projectile par l'opération suivante :

$lbb \dots 6,3521826$	$lb \dots 3,1760913$
$l(1+tt) \dots 0,2314920$	$lt \dots 9,9238135$
comp. $l(4bt-4c) \dots 6,3899150$	$lbt \dots 3,0999048$
$la \dots 2,9735896$	$bt = 1258,65$
$l60 \dots 1,7781512$	$c = 240$
$l60a \dots 4,7517408$	$bt-c = 1018,65$
$l\sqrt{60}a \dots 2,3758704 = l237,613.$	$4bt-4c = 4074,60$

La vitesse du projectile doit donc être de 238 pieds par seconde à peu près.

II. Si à la distance de 1500 pieds le but est de 240 pieds plus bas que le niveau de la batterie, & qu'on veuille employer le même angle de 40 degrés, on mettra les mêmes valeurs dans l'équation $a = \frac{bb + bbt}{4bt + 4c}$, & l'on trouvera qu'il faut une vitesse de 196 pieds par seconde.

III. Si à la même distance de 1500 pieds on veut atteindre un but situé au niveau de la batterie, avec le même angle de 40 degrés, on mettra les valeurs de b , t , & $1+tt$ dans l'équation $a = \frac{b+btt}{4t}$, en faisant l'opération suivante:

$lb \dots 3,1760913$
$l(1+tt) \dots 0,2314920$
comp. $lt \dots 0,0761865$
comp. $l4 \dots 9,3979400$
$l60 \dots 1,7781512$
$l60a \dots 4,6598610$
$l\sqrt{60}a \dots 2,3299305 = l213,76.$

Il faut donc une vitesse de 214 pieds par seconde.

IV. Si l'on veut employer l'angle constant de 45 degrés pour atteindre le but proposé dans les trois exemples précédens, les calculs seront plus simples, & l'on trouvera que pour la première position il faut une vitesse de

231 pieds par seconde ; pour la seconde position une vitesse de 197 ; & pour la troisième, une vitesse de 212 pieds. Le logarithme de cette vitesse est

$\frac{1}{2} (lbb + \text{comp. } l(2b - 2c) + l60)$ pour la première position.

$\frac{1}{2} (lbb + \text{comp. } l(2b + 2c) + l60)$ pour la seconde.

$\frac{1}{2} (l\frac{1}{2}b + l60)$ pour la troisième.

Des deux angles sous lesquels on peut atteindre le même but avec la même vitesse.

36. Quelle que soit la situation du but à l'égard du point de projection, il arrive presque toujours qu'on peut l'atteindre sous deux angles différens avec la même vitesse : & comme les équations $a = \frac{bb + bb\epsilon\epsilon}{4b\epsilon - 4c}$; $a = \frac{bb + bb\epsilon\epsilon}{4b\epsilon + 4c}$; $a = \frac{b + b\epsilon\epsilon}{4\epsilon}$, n'indiquent qu'un seul de ces angles par sa tangente ϵ , nous allons chercher la tangente de l'autre, ou seulement la quantité dont il faut augmenter ou diminuer la tangente de l'angle donné, pour avoir celle de l'autre angle. Supposons donc que ϵ est la tangente du plus petit des deux angles, & nommons q la quantité dont il faut l'augmenter pour avoir la tangente du plus grand ; la nouvelle tangente fera $\epsilon + q$, laquelle étant mise dans les trois valeurs de a à la place de ϵ , on aura

$$a = \frac{bb + bb(\epsilon + q)^2}{4b(\epsilon + q) - 4c} \text{ pour la première position du but.}$$

$$a = \frac{bb + bb(\epsilon + q)^2}{4b(\epsilon + q) + 4c} \text{ pour la seconde.}$$

$$a = \frac{b + b(\epsilon + q)^2}{4(\epsilon + q)} \text{ pour la troisième.}$$

Mais ces trois valeurs de a doivent donner la même

vitesse que les trois premières, elles leur sont donc respectivement égales, & l'on a

$$\frac{bb + bb(t+q)^2}{4b(t+q) - 4c} = \frac{bb + bb\epsilon t}{4b\epsilon - 4c}$$

$$\frac{bb + bb(t+q)^2}{4b(t+q) + 4c} = \frac{bb + bb\epsilon t}{4b\epsilon + 4c}$$

$$\frac{b+b(t+q)^2}{4(t+q)} = \frac{b+b\epsilon t}{4\epsilon}, \text{ d'où l'on tire}$$

pour le 1^{er}. cas $q = \frac{b-b\epsilon t + 2c\epsilon}{b\epsilon - c}$ & $t + q = \frac{b+c\epsilon}{b\epsilon - c}$

pour le 2^e. $q = \frac{b-b\epsilon t - 2c\epsilon}{b\epsilon + c}$ & $t + q = \frac{b-c\epsilon}{b\epsilon + c}$

pour le 3^e. $q = \frac{1-\epsilon t}{\epsilon}$ & $t + q = \frac{1}{\epsilon}$

Donc avec la vitesse résultante de chaque valeur de a , on peut atteindre le même but avec deux angles de projection qui auront pour tangentes t & $\frac{b+c\epsilon}{b\epsilon - c}$, lorsque le but est au dessus du niveau de la batterie; t & $\frac{b-c\epsilon}{b\epsilon + c}$, lorsqu'il est au dessous; t & $\frac{1}{\epsilon}$, quand il est au même niveau, & dans ce dernier cas on voit que les deux angles sont complémentaires l'un de l'autre (§. 2).

On voit encore qu'il ne peut y avoir qu'un seul angle de projection dans chaque cas, lorsque dans le premier on a $t = \frac{b+c\epsilon}{b\epsilon - c}$, ou $t = \frac{\sqrt{(bb+cc)+c}}{b}$; dans le second, $t = \frac{b-c\epsilon}{b\epsilon + c}$, ou $t = \frac{\sqrt{(bb+cc)-c}}{b}$; & dans le troisième $t = \frac{1}{\epsilon}$, ou $t = 1$, c'est-à-dire, dans ce dernier cas, lorsque l'angle de projection est de 45 degrés.

37. Examinons maintenant les angles que les deux directions, par lesquelles le projectile parvient au même but, forment avec la verticale élevée au point de projection, & avec la droite menée de ce point au but : on

vient de voir que pour la troisième position, où le but est au niveau de la batterie, ces deux directions font avec l'horizontale deux angles complémens l'un de l'autre, ou qui valent ensemble l'angle formé par la verticale élevée au point de projection, & la droite menée du but à ce même point, & que la direction unique divise cet angle en deux également. A l'égard de la première position, soient CAE, cAE les deux angles sous lesquels le projectile étant lancé avec la même vitesse atteint le but B: nous venons de trouver que, si t est la tangente de l'angle CAE, $\frac{b+ct}{b-t}$ est la tangente de l'angle cAE, dont le complément cAH aura par conséquent pour tangente $\frac{b-t-c}{b+ct}$ (§. 2); or l'angle CAB est la différence des deux angles CAE, BAE, & ce dernier a pour tangente $\frac{c}{b}$ (§. 4), donc la tangente

de CAB est (§. 14) $\frac{t - \frac{c}{b}}{1 + \frac{ct}{b}} = \frac{bt - c}{b + ct}$; donc l'angle CAB

$=$ cAH, d'où il suit que les deux angles CAB, cAB sont égaux pris ensemble à l'angle HAB, formé par la verticale AH & la droite AB menée au but. On trouve de même dans la seconde position indiquée par la fig. 13, que CAB + cAB = HAB, en observant que la tan-

gente de l'angle CAB = CAE + BAE est $\frac{t + \frac{c}{b}}{1 - \frac{ct}{b}} =$

$\frac{bt + c}{b - ct}$. (§. 13.)

. 38. Concluons donc en général, 1°. que les deux directions par lesquelles un projectile peut atteindre le même but avec la même vitesse, font, avec la droite menée de ce but au point de projection, deux angles qui, pris ensemble, sont

égaux à l'angle formé par cette même droite & la verticale; D'où il est aisé de conclure, 2°. que la direction unique divise toujours cet angle en deux également. 3°. Que les deux angles de projections formés par les premières directions & l'horizontale, valent toujours ensemble un angle droit plus ou moins l'angle fait par l'horizontale & la droite menée au but; selon que ce but est au dessus ou au dessous du niveau de la batterie.

De la durée du mouvement des projectiles.

39. Du point B où est placé le but, élevez la verticale BC qui rencontre la première direction en C, & l'horizontale en E; le projectile parvient de A en B dans le même tems que la force de projection lui auroit fait parcourir AC, ou que la pesanteur l'auroit abaissé de la hauteur CB (§. 26): mais, en conservant les mêmes dénominations que ci-dessus, on a $CE = bt$ (§. 4.); donc $CB = bt - c$ pour la première position du but (fig. 12.); $CB = bt + c$ pour la seconde position (fig. 13.); & $CB = bt$ pour la troisième (fig. 14.). Donc $\sqrt{\frac{bt+c}{15}}$ exprime en secondes le tems que le mobile met à parcourir la courbe AMB, b & c étant évalués en pieds. Dans cette formule du tems le signe $-$ a lieu dans la première position du but; le signe $+$ dans la seconde; & $c = 0$ dans la troisième. Si l'angle de projection est de 45 degrés, on a $t = 1$ & la durée du mouvement sera exprimée par $\sqrt{\frac{b+c}{15}}$.

Exemple I. Soit un mobile qui, projeté sous l'angle de 40 degrés, atteigne un but éloigné horizontalement de 1800 pieds & verticalement de 240 pieds au dessus du

niveau de la batterie : la durée du mouvement sera

$$\sqrt{\frac{1800 \times 0,8390996 - 240}{15}} = 9,2 \text{ secondes.}$$

II. Si l'angle de projection est de 30 degrés, la distance horizontale du but de 1200 pieds, & la distance verticale au dessous du niveau de la batterie de 150 pieds ; la durée du mouvement sera $\sqrt{\frac{1200 \times 0,5773503 + 150}{15}} = 7,5 \text{ secondes.}$

III. Si le but situé au niveau de la batterie est éloigné de 2000 pieds, l'angle de projection étant de 60 degrés, on trouvera le tems du trajet $= \sqrt{\frac{2000 \times 1,7320508}{15}} = 15,2 \text{ secondes.}$

40. De l'expression du tems $\sqrt{\frac{bt}{15}}$ il est facile de conclure l'amplitude horizontale, lorsqu'on connoît la durée du mouvement & l'angle de projection : il n'y a qu'à faire le carré du tems exprimé en secondes, multiplier ce carré par 15, & diviser le produit par la tangente de l'angle de projection, on aura l'amplitude b .

41. Connoissant le tems du trajet, l'angle de projection & l'une des distances du but, on trouvera l'autre distance par la formule $\sqrt{\frac{bt \mp c}{15}}$: car nommant T le tems du trajet, on a $T = \sqrt{\frac{bt \mp c}{15}}$, d'où l'on tire $b = \frac{15TT \pm c}{t}$; ou $\mp c = 15TT - bt$. Dans la valeur de b , on prendra $+c$, si le but est au dessus du niveau de la batterie, & $-c$ s'il est au dessous. Si, connoissant b , on cherche la distance verticale du but, on conclura qu'il est au dessus du niveau de la batterie si l'on trouve c positif, & au dessous lorsque c a une valeur négative.

Des amplitudes horizontales.

42. Quand le but qu'on veut atteindre est au niveau du point de projection, on a $c = 0$, & l'équation générale

$bb + bbt = 4abt + 4ac$ devient $bb + bbt = 4abt$;
 d'où l'on tire $b = \frac{4at}{1+tt}$. Donc à vitesse égale les amplitudes ou portées horizontales sont comme $\frac{4t}{1+tt}$, ou comme $\frac{2t}{1+tt}$; or $\frac{2t}{1+tt}$ (§. 1.) est le sinus d'un angle double de celui qui a t pour tangente; donc les amplitudes sont comme les sinus du double des angles de projection.

43. On obtient donc la plus grande amplitude lorsque l'angle de projection est de 45 degrés: car l'angle double de celui de 45 degrés, qui est l'angle droit, a le plus grand sinus.

44. Il suit encore du même principe que l'amplitude sous 15 degrés, est moitié de l'amplitude sous 45; parce que ces amplitudes sont entre elles comme le sinus de 30 degrés est au sinus de l'angle droit, c'est-à-dire comme 1. est à 2.

45. Lorsque l'angle de projection est de 45 degrés, sa tangente est égale au rayon $= 1$; mettant cette valeur de t dans l'équation $b = \frac{4at}{1+tt}$ trouvée au §. 42, on aura $b = 2a$; donc sous 15 degrés on a l'amplitude $b = a$ (§. 43.).

De la plus grande hauteur du jet.

46. L'axe de la parabole que décrit le projectile étant vertical, il est clair que le sommet de cet axe est le point de la courbe le plus élevé au dessus de l'horizontale qui passe par le point de projection, & qu'il répond au milieu de l'amplitude: or on a vu (§. 42.) que l'amplitude est $= \frac{4at}{1+tt}$, donc en mettant sa moitié $\frac{2at}{1+tt}$ à la place de b dans l'équation $bb + bbt = 4abt + 4ac$, on trouvera $c = \frac{at}{1+tt}$ pour l'expression de la plus grande hauteur à la-

quelle un projectile puisse s'élever, sa vitesse étant due à la hauteur a , & l'angle de projection ayant t pour tangente.

47. Les plus grandes élévations des projectiles, sous différens angles & avec la même vitesse, sont donc comme $\frac{t^2}{1+t^2}$, dont la racine quarrée $\sqrt{\frac{t}{1+t^2}}$ est le sinus d'un angle qui a t pour tangente (§. 1.); donc les plus grandes hauteurs auxquelles le mobile s'élèvera, sont entre elles comme les quarrés des sinus des angles de projection.

48. Lorsque l'angle de projection est de 45 degrés, on a $t = 1$, & $c = \frac{1}{2}a$; donc, dans ce cas de la troisieme position du but, la plus grande hauteur est le quart de l'amplitude.

49. Ce que nous venons de dire de la théorie du mouvement des corps projetés dans le vuide, peut s'appliquer à tous les projectiles, quelque soit le moyen qu'on emploie pour leur imprimer le mouvement: la balliste des anciens, leur fronde, les armes à feu des modernes y sont également soumises; mais c'est dans l'usage de ces dernières sur-tout qu'il y a le plus d'avantages à tirer de notre théorie: l'angle de projection s'y détermine avec la plus grande précision; & quoique l'agent qu'on y emploie soit sujet à de grandes variations, on parvient néanmoins, dans plusieurs circonstances, à connoître assez exactement la force qu'il exerce. Mon dessein n'est point d'entrer dans le détail de toutes les pratiques qu'exige le tir des armes à feu; mais je ne puis me dispenser de parler de celles qui doivent contribuer à la justesse du tir, en considérant séparément les armes les plus usitées: le mortier, le canon & le fusil.

Du tir du mortier.

50. Pour assurer au tir du mortier toute la justesse dont il est susceptible, on commence par battre & affermir le terrain qui doit lui servir d'emplacement. On y établit une plate-forme de forts madriers, que l'on construit le plus horizontalement qu'il est possible, & sur laquelle on place le mortier monté sur son affut. Nous verrons bientôt qu'il n'est pas nécessaire d'assujettir la plate-forme à être parfaitement de niveau : il est même bon que cette précaution soit inutile; car quelque solidement qu'une plate-forme soit construite, on ne doit pas s'attendre qu'elle conserve son niveau après que le mortier aura tiré quelques coups, sur-tout si c'est un gros mortier & qu'on y emploie de fortes charges. Il n'est pas moins indifférent que les deux tourillons du mortier soient placés horizontalement sur l'affut.

51. La seconde précaution à prendre concerne la charge de poudre placée dans la chambre du mortier. Ce qu'il y a de plus essentiel à observer à cet égard, c'est de faire en sorte que des charges égales puissent exercer la même force : or tout corps étranger qu'on introduiroit dans la chambre avec la poudre, soit pour la contenir, soit pour remplir l'espace entre la bombe & la charge, ne manqueroit pas de nuire à cette uniformité qu'on devoit se promettre des charges égales. Je pense donc que, pour éviter les irrégularités qui peuvent provenir de l'arrangement de la poudre, le meilleur moyen seroit de la mettre dans une gargousse de papier, & de l'assujettir dans le fond de la chambre par une simple & légère compression.

52. On porte ensuite son attention sur les bombes. Si

le mouvement se faisoit effectivement dans le vuide, ou dans un milieu non résistant, comme nous le supposons dans cette première section, il seroit fort inutile de considérer le poids & le diamètre des bombes : ces quantités n'ayant aucune influence sur le mouvement des corps dans le vuide, on a pu en faire abstraction dans la théorie précédente. Mais puisque les bombes se meuvent réellement dans un milieu résistant, nous verrons que, pour la régularité du tir, il faut nécessairement que celles du même calibre aient aussi le même poids & le même diamètre.

53. On place la bombe dans le mortier de manière que son axe se confonde avec celui de l'âme du mortier. J'appelle axe de la bombe la ligne droite qui renferme son centre de gravité & son centre de figure ; cette ligne, lorsque la bombe est bien faite, en est un diamètre passant par le centre de l'œil. Pour fixer la bombe dans cette situation, on se sert de divers moyens plus ou moins efficaces ; les éclisses sont sans contredit le meilleur qu'on puisse employer. Ce sont des parallépipèdes de bois de 9 à 10 lignes de largeur, de 3 à 4 pouces de longueur, & dont l'épaisseur égale la moitié du vent de la bombe. On en place quatre autour de la bombe, en les enfonçant le plus également qu'il est possible au dessous de son cercle horizontal. Mais la configuration actuelle des mortiers étant cause que les éclisses, après avoir dépassé ce cercle, sont forcées de se courber pour entrer dans le logement de la bombe, il est rare qu'elles remplissent leur objet en opposant toutes les quatre la même résistance, condition essentielle à la justesse du tir, & qu'on ne peut obtenir qu'en donnant à l'âme des mortiers la forme proposée, il y a quelques années, par un Officier

supérieur du corps royal de l'artillerie , qui s'est utilement occupé de tout ce qui a rapport au service de cette arme. Rien n'empêcheroit alors que les éclisses ne fussent également enfoncées , la bombe également contenue dans tout son pourtour , sa direction mieux assurée , & le tir beaucoup plus régulier (*).

54. Enfin on incline le mortier suivant l'angle de projection que son axe doit former avec l'horizon , & on le dirige vers l'objet que l'on veut atteindre. Cette pratique , qui est le complément de toutes les autres pour la justesse du tir des mortiers , est fondée sur le principe suivant : l'axe du mortier peut être considéré comme étant l'intersection commune d'une infinité de plans , qui sont tous verticaux lorsque le mortier est dans une situation verticale ; mais s'il est incliné , il n'y a plus qu'un seul de tous ces plans qui soit vertical , & c'est ce plan unique , dans le prolongement duquel se trouve la trajectoire décrite par la bombe , qu'il faut diriger vers l'objet qu'on veut frapper. Il est aisé de voir en outre que la situation

(*) M. Pillon d'Arcquebouville avoit proposé de prolonger de quelques pouces la partie cylindrique de l'ame du mortier , de maniere à laisser une retraite large de 2 lignes , pour servir d'appui aux éclisses : au moyen de quoi dans le mortier de 12 pouces la longueur de l'ame jusqu'à la retraite seroit de 14 po. 1 li. 6 p^o. On est sûr alors que les éclisses étant appuyées sur cette retraite sont également enfoncées , & que placées aux extrémités des diamètres vertical & horizontal , la bombe est également assujettie dans son pourtour. Les épreuves faites à Metz en 1769 , & à Douai en 1770 , prouvent que cette configuration contribue beaucoup à la conservation des mortiers , & qu'elle influe sur la justesse & l'uniformité du tir.

de la plate-forme, horizontale ou non, n'influe en rien sur l'existence de ce plan vertical : c'est ce qui m'a fait dire plus haut, que la justesse du tir du mortier ne dépend ni du niveau de la plate-forme, ni de celui des tourillons. Il n'est plus question que de déterminer dans le mortier la position de ce plan vertical : c'est encore au même officier qu'on est redevable d'un instrument propre à indiquer ce plan, à le diriger sur l'objet, & à donner au mortier une inclinaison convenable selon les circonstances. Cet instrument, qu'on nomme quart de cercle, étant connu, il est inutile d'entrer ici dans le détail de sa description & de la manière de s'en servir : je dirai seulement que d'autres officiers ont aussi imaginé des moyens très-simples & très-ingénieux pour remplir les mêmes objets, mais sans rien ajouter à la solidité du premier quart de cercle, qui, à cet égard, l'emporte jusqu'à présent sur tous les autres.

De la force de projection de la poudre dans le mortier.

55. Pour connoître la force qu'une charge de poudre est capable d'exercer dans le mortier, ou la vitesse qu'elle peut communiquer à la bombe, on tirera un coup d'épreuve avec cette charge, en donnant au mortier l'inclinaison qu'on voudra ; assez petite cependant, pour que la bombe restant moins long-tems exposée à la résistance de l'air, on puisse conclure une vitesse plus approchante de la véritable. Le coup étant tiré, on s'assurera de la situation du point de chute relativement au point de départ, en mesurant sa distance horizontale pour avoir la valeur de b , & sa distance verticale pour avoir celle de

e ; connoissant donc les quantités b , c & la tangente t de l'angle de projection, on se servira de l'équation $a = \frac{bb + bb\,tt}{4\,bt + 4\,c}$ (§. 33), qui donnera la valeur de a , & par conséquent la vitesse de la bombe (§. 33).

Si, par exemple, le coup d'épreuve a été fait avec quatre onces de poudre, & qu'en inclinant le mortier de 20 degrés, la bombe ait été portée à la distance horizontale de 90 toises ou 540 pieds, en un point élevé de 20 pieds au dessus du niveau de la batterie, on trouvera $a = 468$ pieds, & l'on conclura que la charge de 4 onces communique à la bombe de 8 pouces une vitesse d'environ 168 pieds par seconde.

56. Si le point de chute est de niveau avec le point de départ, ou fera usage de la formule $a = \frac{b + b\,tt}{4\,t}$, pour trouver la vitesse de la bombe. Dans ce cas il suffit d'avoir la portée sous un angle donné pour connoître les amplitudes horizontales sous tout autre angle avec la même charge, puisque ces amplitudes sont proportionnelles aux sinus du double des angles de projections (§. 42). C'est sur ce principe qu'ont été calculées les tables du Bombardier françois par M. Belidor : tables inutiles en ce qu'il est très-facile d'y suppléer par les tables ordinaires des sinus ; & défectueuses dans la pratique, parce qu'elles supposent que le mouvement des bombes se fait dans le vuide.

57. Quoique la formule $a = \frac{b + b\,tt}{4\,t}$ ne donne point la force de projection, ou la vitesse du projectile, lorsqu'il se meut dans un milieu résistant ; elle peut cependant servir à comparer les vitesses résultantes de deux charges de poudre qui diffèrent peu entre elles ; ou les vitesses que produit la même charge de deux especes de poudre de

qualités différentes. Par exemple, le petit mortier dont on se sert pour éprouver les poudres, étant dirigé sous l'angle constant de 45 degrés, donneroit $a = \frac{1}{2} b$ dans le vuide ; mais quoique dans l'air on ait toujours $a > \frac{1}{2} b$, on peut sans erreur sensible considérer les forces de projection exprimées par a , comme étant proportionnelles aux amplitudes b ; & puisque les vitesses dues aux hauteurs a sont en raison de $\sqrt{a}$, on pourra conclure que ces vitesses sont aussi comme $\sqrt{b}$. Si donc on éprouve deux especes de poudre, qu'avec trois onces de l'une le globe soit porté à la distance b , & avec la même charge de l'autre à la distance B , il n'y aura aucun inconvénient à conclure que les vitesses résultantes au même mobile de la même charge de deux especes de poudre, sont entre elles comme $\sqrt{b}$ est à $\sqrt{B}$, c'est-à-dire comme les racines quarrées des portées obtenues avec le mortier d'épreuve.

58. On peut aussi trouver la vitesse d'une bombe par le tems qu'elle met à parcourir sa trajectoire ; car ce tems étant le même que celui qu'elle emploieroit à parcourir la droite AC (fig. 12) d'un mouvement uniforme (§. 26), en vertu de la force de projection si elle agissoit seule sur le projectile, il est clair qu'en divisant cet espace AC par le tems, on aura la vitesse. Il suffit alors de mesurer l'une des deux distances du point de chute, l'horizontale ou la verticale, on aura l'autre par la formule du tems qui est $\sqrt{\frac{b \mp c}{15}}$ (§. 38).

L'observation du tems pouvant être d'une grande utilité dans une infinité de circonstances, & principalement dans le mouvement des projectiles pour en connoître la durée, il ne fera pas hors de propos d'entrer ici dans quelques détails sur la maniere de la faire avec précision.

De la manière d'observer le tems.

59. Pour connoître le tems qu'un projectile met à parcourir sa trajectoire, depuis le point de départ jusqu'au point de chute, on peut se servir d'une montre, dont on comptera le nombre des vibrations qu'elle fera pendant cet intervalle: l'instant de l'inflammation, & l'instant de la chute sont les deux termes entre lesquels il faut compter les vibrations ou battemens de la montre. On sent que la plus grande précision est ici nécessaire, parce qu'une vibration de plus ou de moins peut faire une différence considérable, sur-tout si le mobile a une grande vitesse, & que le point de chute soit peu éloigné. La durée de chaque vibration de la montre étant connue, on connoitra par leur nombre le tems que l'on cherche.

L'usage ordinaire des montres étant borné à indiquer l'heure, c'est sur la marche des aiguilles que l'on porte communément toute son attention, sans s'embarrasser des détails de construction qui servent à régler la durée des vibrations: cette connoissance étant cependant nécessaire pour un grand nombre d'observations, voici comment on pourra se la procurer: on fera démonter la montre par un horloger, & l'on examinera combien il y a de dents & d'ailles, 1°. dans la roue de longue tige qui porte l'aiguille des minutes & fait un tour par heure; 2°. dans la roue moyenne & dans son pignon; 3°. dans la roue de champ & son pignon; 4°. dans la roue de rencontre & son pignon. Nommant L le nombre des dents de la roue de longue tige; M le nombre des dents de la moyenne; m , le nombre d'ailles de son pignon; C , le nombre des dents de la roue de champ; c , celui des ailes de son pi-

gnon; R le nombre des dents de la roue de rencontre; & r, celui des ailes de son pignon; la formule $\frac{L \times M \times C \times 2 R}{m \times c \times r}$ exprimera le nombre des vibrations que le balancier fait en une heure, ou le nombre de battemens que l'on entend en mettant la montre à l'oreille. Divisant ce nombre par 60, on aura le nombre de vibrations qu'elle fait en une minute; & si l'on divise ce dernier nombre encore par 60, on aura le nombre de ses vibrations par seconde (*).

Supposons, par exemple, que la roue de longue tige a 56 dents; la roue moyenne 54; son pignon sept ailes; la roue de champ 48 dents; son pignon fix ailes; la roue de rencontre, 15 dents & son pignon fix ailes; mettant ces valeurs dans la formule ci-dessus, on trouvera $\frac{56 \times 54 \times 48 \times 30}{7 \times 6 \times 6} = 17280$; c'est-à-dire qu'une pareille montre fait 17280 vibrations par heure; $\frac{17280}{60}$ ou 288 vibrations par minute, & $\frac{288}{60}$ ou $4 \frac{4}{5}$ par seconde: d'où il est aisé de voir que 24 vibrations font 5 secondes, 36 font $7 \frac{1}{2}$ secondes, & ainsi des autres.

(*) Suivant la nouvelle division du tems, il est aisé de construire les montres de maniere que le balancier fasse 40000 vibrations dans une heure, qui est la dixieme partie du jour; & comme cette nouvelle heure se sous-divise en 100 minutes & la minute en 100 secondes, il est clair que le balancier fera quatre vibrations par seconde.

La nouvelle seconde se trouvant être à l'ancienne dans le rapport de 108 à 125, la vitesse du son sera, pendant sa durée, de $\frac{108}{125} \times 173$ to. = 149, 47, ou de 291, 23 mètres.

Il suit du même rapport que la longueur du nouveau pendule à secondes, celle de l'ancienne étant de $3 \overset{\text{pi po li}}{0} 8, 57$, est de $2 \overset{\text{pi po li}}{3} 10, 23$ = 0,7535 mètres; ce qui peut aussi servir à mesurer le tems.

Ce n'est pas tout, & l'on risqueroit de n'avoir qu'une observation imparfaite, si l'on ne parvenoit, par une méthode sûre, à compter les vibrations avec facilité, & de manière à pouvoir en retenir le nombre sans confusion. Voici celle que je conseille de suivre, & dont je me suis toujours servi avec succès : appliquez la montre à l'oreille & comptez les vibrations quatre à quatre, en disant une, deux, trois, quatre; une, deux, trois, quatre; une, deux, trois, quatre, &c. avec la même vitesse que les vibrations se font entendre. Mais, pour mieux s'assurer du nombre de fois que vous aurez compté quatre vibrations, au lieu de prononcer le mot *quatre* à chaque quatrième vibration, prononcez successivement à sa place les nombre un, deux, trois, quatre, cinq, &c. & dites : une, deux, trois, UN; une, deux, trois, DEUX; une, deux, trois, TROIS; une, deux, trois, QUATRE; une, deux, trois, CINQ; une, deux, trois, SIX, &c. au moyen de quoi le dernier nombre prononcé indiquera toujours combien de fois vous aurez compté 4 vibrations; & ce nombre multiplié par 4 fera le nombre de vibrations comptées pendant l'observation; on y ajoutera 1, 2 ou 3, si l'observation s'est terminée à la 1^{re}. ou à la 2^e. ou à la 3^e. des quatre dernières vibrations.

Si, par exemple, en observant le mouvement d'une bombe projetée sous l'angle de 30 degrés, on a compté 27 vibrations de la montre, & que la bombe soit tombée à la distance horizontale de 120 toises, ou 720 pieds; on trouvera d'abord que dans une montre pareille à celle qu'on a décrite ci-dessus, les 27 vibrations répondent à $5\frac{1}{4}$ secondes. Or $AC = b \cdot \sqrt{1 + \epsilon \epsilon} = 831,4$; divisant donc ce nombre par $5\frac{1}{4}$, on aura 148 pieds environ pour la vitesse

de la bombe. Et puisque le tems est exprimé par la formule $\sqrt{\frac{be+c}{15}}$ (§. 38.), l'équation $\sqrt{\frac{be+c}{15}} = 5 \frac{2}{5}$ donnera la valeur de c , laquelle, parce qu'elle est négative, fait voir que le point de chute est d'environ 59 pieds au dessous du niveau de la batterie.

Il est inutile de s'arrêter davantage sur le tir des mortiers : en multipliant les exemples, nous ne ferions que répéter ce qui a été dit dans la théorie précédente des angles de projections, & des autres circonstances qui accompagnent le mouvement des projectiles. Passons au tir du canon.

Du tir du canon.

60. Les principaux élémens qui entrent dans la théorie du tir du canon, & de la connoissance desquels dépend essentiellement la justesse de ce tir, sont, 1°. la vitesse du boulet, ou le tems qu'il met à parcourir sa trajectoire. 2°. Les dimensions de la piece de canon. 3°. La distance de l'objet qu'on se propose de frapper.

61. Pointer une piece de canon, c'est diriger le plan vertical qui passe par son axe sur l'objet qu'on veut atteindre ; en donnant à cet axe une inclinaison convenable.

62. Le coup d'œil bien exercé est le moyen le plus simple & le plus exact qu'on puisse employer pour déterminer la situation de ce plan vertical dans le canon : il divise toujours la piece en deux parties semblables & parfaitement égales, abstraction faite des anses & des tourillons ; de maniere que dans la section se trouvent les parties les plus élevées de la surface extérieure, & par conséquent ses deux points les plus saillans, l'un à l'extrémité de la culasse sur la plate-bande ; l'autre vers la bouche sur la moulure qu'on appelle bourelet en forme de tulippe, ou le plus

grand renflement de la bouche. La ligne menée par ces deux points sert à diriger la piece vers le but, & c'est dans sa direction que doit être placé l'œil du Canonier pour pointer la piece.

63. Ainsi, pour pointer une piece de canon, il faut diriger la vue suivant une ligne droite qui rase sa surface extérieure & passe par l'extrémité des parties les plus saillantes & les plus élevées de la culasse & de la bouche; par le dessus de la plate-bande de culasse, & le dessus du renflement de la bouche. C'est cette ligne, nommée *ligne de mire*, ou *rayon visuel*, qu'il faut diriger avec le canon vers l'objet que le boulet doit frapper.

64. Lorsque les roues de l'affut & les tourillons de la piece sont de niveau, la lumiere doit se trouver dans le plan vertical qui passe par l'axe du canon : dans ce cas, que l'on cherche à se procurer par la construction des affuts, & par des plate-formes qui ne penchent pas plus d'un côté que de l'autre ; le Canonier fait très-bien de placer l'œil vis-à-vis de la lumiere pour pointer la piece : mais si, par quelque cause que ce soit, l'axe des tourillons n'est point placé horizontalement, la lumiere ne peut qu'induire en erreur pour la vraie direction de la piece ; le point qui y répond alors sur la plate-bande de culasse n'étant pas le plus élevé, ni par conséquent dans le plan vertical de l'axe du canon. Il est vrai qu'en dirigeant la vue suivant un autre plan vertical parallele à celui-ci, l'erreur seroit insensible quant à la direction ; mais, outre que la chose est très-difficile, il en résulteroit encore beaucoup d'incertitude dans l'estimation de l'angle de projection. Afin d'éviter tous ces inconvénients, je pense que la meilleure maniere de pointer une piece avec justesse, seroit de se

placer à trois ou quatre pieds en arriere de la culasse, & de viser de là par les deux points qui paroissent les plus élevés sur la plate-bande de culasse, & sur le plus grand renflement de la bouche; sans s'embarrasser ni de la lumiere, ni des autres boutons de mire, dont l'usage est toujours inutile, & souvent nuisible à la justesse du tir. C'est à trouver ces deux points, à les confondre ensemble dans le même alignement avec l'œil & l'objet qu'on veut frapper, que le Canonier doit principalement s'exercer & se former le coup d'œil. L'expérience a souvent justifié la préférence qu'on doit donner à cette maniere de pointer, sur celle qui est communément usitée: celle-ci exige que les tourillons de la piece soient situés horizontalement, tandis que cette condition, qui a rarement lieu, est inutile pour l'autre. Au reste, tout ce que nous venons de dire, n'est vraiment utile que dans les cas qui exigent de la précision, & une grande justesse de direction; & l'on sent bien que, pour les objets qui ont une certaine étendue horizontale, on est dispensé d'y regarder de si près; l'angle de projection, relativement à la distance de l'objet, est alors ce qu'il y a de plus essentiel à considérer.

De la vitesse du boulet.

65. Si nous avons une connoissance parfaite de toutes les propriétés des matieres qui entrent dans la composition de la poudre, si nous connoissons le degré d'expansibilité du fluide élastique dans lequel réside toute la force de cet agent; la maniere dont il se développe par l'inflammation & qu'il exerce son effort; il seroit inutile de recourir à d'autres moyens pour déterminer la vitesse qu'une charge de poudre peut imprimer à un projectile. Ce n'est pas qu'on

n'ait tenté diverses théories pour déduire de la nature même de la poudre la force qu'elle est capable d'exercer : mais quoique d'accord avec l'expérience dans certains cas particuliers, ces théories s'en éloignent tellement dans une infinité d'autres, que leur usage nous expose continuellement à l'erreur ou à l'incertitude. Nous nous bornerons donc ici à l'examen des effets de la poudre, sans chercher à remonter à leurs causes; nous consulterons l'expérience, & nous indiquerons tous les procédés qu'il faut suivre pour la bien consulter.

66. La vitesse d'un boulet se trouve ou par le tems qu'il a mis à faire son trajet depuis la bouche du canon jusqu'à sa chute; ou par l'angle de projection & la situation du point de chute, relativement au point de départ.

Le tems qu'un boulet met à parcourir sa courbe peut s'observer, comme pour la bombe, par le moyen d'une montre : mais ce tems étant ordinairement très-court, le moindre mécompte peut occasionner une erreur considérable. Je ne conseillerai donc d'employer cette méthode qu'avec la plus grande précaution & au défaut de tout autre moyen. En voici une beaucoup plus exacte & très-praticable dans les écoles d'artillerie : elle dépend de la vitesse avec laquelle le son se propage, & qu'on a trouvé être de 173 toises par seconde. Pour s'en servir, un observateur se placera aux environs de la butte, en un endroit d'où il puisse voir le boulet frapper contre la butte au même instant qu'il entendra le bruit du canon. Il ne sera pas difficile de trouver cet endroit lorsqu'on sera prévenu que, si l'on voit arriver le boulet au but avant qu'on entende le bruit du canon, c'est une marque qu'on est trop loin de la batterie, dont il faudra par conséquent se rap-

procher. Si, au contraire, on entend le bruit avant que le boulet soit arrivé, on sera trop près du canon, & il faudra s'en éloigner. Ce point étant trouvé, on mesurera la distance au canon, & l'on cherchera combien le bruit a dû employer de tems pour faire ce trajet, à raison de 173 toises par seconde : ce tems sera aussi celui que le boulet aura mis pour aller de la batterie à la butte ; ce qui donne sa vitesse.

Si, par exemple, la distance de la batterie à la butte est de 215 toises, & qu'un observateur placé à 216 toises du canon entende le bruit au même instant qu'il a vu le boulet frapper contre la butte : puisque la vitesse du son est de 173 toises par seconde, les 216 toises ont été parcourues en $\frac{216}{173}$ de seconde ; & comme dans le même tems le boulet a parcouru 215 toises, ou, plus exactement, 217 toises, à cause de la courbure de son chemin, sa vitesse par seconde sera de $\frac{217 \times 173}{216}$ toises, ou de 1042 pieds. On auroit trouvé la même vitesse, à un pied près, si, en se servant de la montre décrite ci-dessus (§ 59), on eût compté six vibrations pendant le trajet du boulet.

67. Il est à remarquer que la vitesse dont nous venons de parler, n'est point celle du boulet au sortir du canon ; ni celle qui lui reste en arrivant au but : c'est une vitesse moyenne entre ces deux-là, avec laquelle le boulet parcourroit le même espace d'un mouvement uniforme dans le tems trouvé par l'observation. Cette vitesse seroit différente, quand même on ne changeroit point la force de projection, si le but étoit plus ou moins éloigné. Comme il est essentiel pour la justesse du tir de connoître le tems employé par le boulet à faire le trajet de la batterie à la

butte, il seroit à desirer que de pareilles observations fussent multipliées aux écoles, & étendues à toutes les charges d'usage, à tous les calibres & à diverses distances.

68. L'angle de projection fournit un autre moyen plus exact encore que les précédens, pour connoître le tems que le boulet met à parcourir un certain espace ; mais il faut, pour s'en servir, y joindre la connoissance de la situation du point de chute à l'égard de la bouche du canon, c'est-à-dire de la distance horizontale de ce point, & de la quantité dont il est plus haut ou plus bas que le niveau de la bouche du canon : il est facile de s'assurer de cette situation par le nivellement. Quant à l'angle de projection, comme il arrive rarement que le boulet, en sortant de la piece, suive la direction de son axe, on se tromperoit souvent, si l'on s'en tenoit à l'angle que l'axe du canon forme avec l'horizon, presque toujours différent de celui de la première direction du projectile. Cette différence, qui occasionne dans les portées de fréquentes irrégularités, provient principalement du vent du boulet : le moindre choc contre le bas ou le haut de la bouche du canon, élève ou abaisse le boulet, change sa direction, augmente par conséquent ou diminue la portée. On compte tirer sous un angle, & le boulet part sous un autre plus ou moins ouvert. Quoiqu'on ne puisse pas prévoir sous quel angle le boulet sortira du canon, ce qui sera toujours une source d'irrégularités inévitables ; il est néanmoins très-important de savoir sous quel angle il est parti, pour en conclure sa vitesse. Il est indispensable d'observer cet angle, sur-tout dans les petites inclinaisons, telles qu'on les donne ordinairement au canon ; parce que la moindre différence dans les petits angles en produit de

très-considérables dans les portées. Et il s'en faut de beaucoup que la manière de suppléer à l'inégalité des portées, en prenant une moyenne sur toutes celles qu'on a obtenues de la même charge & de la même inclinaison du canon, conduise à aucune connoissance certaine; il faudroit pour cela que la somme des erreurs en excès fût précisément égale à la somme des erreurs en défaut, ce qui est contre toute vraisemblance. On ne peut donc se servir utilement des portées pour en conclure la vitesse des boulets, qu'autant que l'on connoitra l'angle de départ. Voici comment on peut s'y prendre pour parvenir à la connoissance de cet angle.

Trouver l'angle de départ d'un boulet.

69. Pour connoître la direction que le boulet prend en sortant du canon, il suffit de s'assurer de la position d'un point par où passe cette direction à une distance connue de la piece. On plantera à cet effet deux piquets, l'un P (fig. 15.) au dessous de la bouche A du canon, & l'autre Q à la distance de quatre toises sur la ligne de tir; celui-ci doit être fendu à la tête, pour recevoir une règle BC de bois de sapin, de tilleul ou de peuplier, très-mince, de trois à quatre pouces de largeur, & d'une hauteur telle que le boulet puisse la rencontrer à quelques pouces au dessous de l'extrémité supérieure B. Le piquet Q, dont la hauteur hors de terre est d'environ trois pieds, doit être planté de manière que la règle BC soit dans une situation verticale, & sa face perpendiculaire au plan vertical du tir. Le piquet P pourra être moins élevé que l'autre; on marquera sur sa tête un trait parallèle à la fente du piquet Q, & c'est entre ces deux lignes qu'il faudra

mesurer la distance des deux piquets, que nous supposons de quatre toises. On s'assurera aussi par le nivellement de la quantité dont la tête du piquet Q est plus élevée que celle du piquet P . Enfin on aura une règle R de trois pieds divisée en pieds, pouces & lignes; cette règle étant placée verticalement sur le trait du piquet P , servira à mettre la bouche du canon à quatre toises de la règle BC , & à mesurer à chaque coup la quantité dont la partie inférieure m de la bouche du canon est plus élevée que la tête du piquet P ; d'où l'on conclura celle dont ce point m de la pièce est plus élevé que la tête du piquet Q . Tout étant ainsi disposé, & la pièce dirigée horizontalement sur la règle BC , comme à la distance de quatre toises le boulet ne s'est point encore sensiblement abaissé par sa pesanteur, il est clair que, s'il suit la direction de l'ame du canon, le point i où le bas du boulet rencontre la règle BC , sera au même niveau que le point m ; ce que l'on verra en mesurant la hauteur du point i au dessus de la tête du piquet. Mais si, par un choc contre la partie inférieure de la bouche, le boulet s'élève en sortant de la pièce, le point g frappé par le bas du boulet sera plus élevé que le point i ou le point m ; mesurant donc gi , en prenant l'horizontale mi pour rayon ou sinus total, gi sera la tangente de l'angle de départ gmi . La ligne horizontale mi que l'on considère ici, est celle qui passe par le bas de la bouche du canon, parce que c'est le bas du boulet dont on voit l'empreinte sur la partie inférieure de la règle: cette partie reste en place, le haut est enlevé & jeté au loin. Je me suis plusieurs fois assuré que cette empreinte est exactement une portion de la circonférence du boulet qui, lorsqu'il rencontre la règle par le

milieu de sa largeur, ou à-peu-près, emporte une pièce précisément de la hauteur de son diamètre.

L'angle de projection étant donc connu par sa tangente, on mesurera les distances horizontale & verticale du point de chute; on calculera ensuite la vitesse du boulet par l'équation $a = \frac{bb + bb \epsilon \epsilon}{4 \epsilon b + 4 \epsilon}$; (§. 34.) & le tems par la formule $\sqrt{\frac{\epsilon b + \epsilon}{15}}$. (§. 39.)

Il pourroit se faire, pour peu que la pesanteur eût abaissé le boulet d'un piquet à l'autre, que la vitesse qu'on vient de trouver fût un peu plus grande que la vitesse réelle du boulet: dans ce cas, ce n'est point gi qu'il faudroit prendre pour la tangente de l'angle de projection; mais gi augmenté de la quantité dont le boulet s'est abaissé en allant de m en g . Pour trouver cette quantité, on peut se servir de la vitesse même que l'on vient de calculer, d'après laquelle & en supposant le mouvement uniforme, on cherchera le tems employé à parcourir l'espace mg de quatre toises (*); d'où l'on conclura l'abaissement du boulet pendant ce tems, à raison de 15,1 pouces pendant la première seconde. La première tangente gi augmentée de cet abaissement, est la nouvelle tangente qu'il faudra employer pour calculer la vitesse du boulet, & le tems de sa course jusqu'à sa chute. Nous allons éclaircir par un exemple les procédés & les calculs de cette expérience.

Exemple. Les deux piquets P & Q étant à quatre toises l'un de l'autre, le coup de niveau jeté sur leurs têtes a fait voir que la tête du piquet P étoit de 7 po. 6 li. plus bas

(*) Le lecteur ne doit pas perdre de vue qu'il ne s'agit dans cette section que du mouvement des projectiles dans le vuide; ne devant traiter de la résistance de l'air que dans la section suivante.

que celle du piquet Q. On a chargé la piece, qui étoit du calibre de 16, avec quatre livres de poudre mise dans une gargouffe de papier, qu'on a simplement pressée dans le fond de la chambre, le boulet par-dessus, & un léger bouchon de fourage refoulé d'un seul coup de refouloir. La regle divisée R étant ensuite posée verticalement sur le trait de la tête du piquet P, on a avancé le canon jusqu'à cette regle, & on l'a dirigé horizontalement par le moyen d'un quart de cercle ; ce qui donnoit exactement quatre toises pour la distance de la bouche du canon à la regle BC placée verticalement dans la fente du piquet Q. On a vu aussi par la regle divisée R, que le bas de la bouche du canon, le point *m*, étoit élevé au dessus du piquet P de 17 po. 6 li. & par conséquent de dix pouces au dessus du piquet Q ; c'est-à-dire que le point *i*, où l'horizontale menée du point *m* rencontroit la regle BC, étoit de 10 pouces au dessus de ce piquet. Le coup étant tiré, l'empreinte *g* du bas du boulet sur la regle BC, se trouva à 12 po. 6 li. au dessus du piquet, ou à 2 po. 6 li. au dessus du point *i*. Le boulet s'est donc élevé en sortant de la piece, il est parti sous un angle *gmi*, dont la tangente = $\frac{gi}{mi}$, en prenant l'unité pour rayon (§. 5.). Le logarithme de cette tangente est 7,9385475 qui répond à un angle de 0° 29' 50". Ayant ensuite mesuré la distance du point de chute, on trouva qu'il étoit à 1377 pieds de la bouche du canon, & de 11 pi. 0 po. 9 li. plus bas que le point *m*, ce qui donne $b = 1377$; $c = 11,0625$; ces valeurs substituées dans l'équation $a = \frac{bb + bbe}{4eb + 4c}$, & dans la formule $\sqrt{\frac{eb + c}{15}}$, donnent 1117 pieds par seconde pour la vitesse du boulet ; & 1,237" pour le tems du trajet.

Voyons maintenant s'il n'y a pas une correction à faire à cette vitesse, qui est sûrement trop grande, si la pesanteur a abaissé le boulet pendant qu'il a parcouru l'espace mg de 4 toises ou 24 pieds : comme la différence ne peut pas être bien considérable, nous emploierons la vitesse même que nous venons de trouver, pour connoître le tems que le boulet a mis à parcourir 24 pieds ; ce tems sera de $\frac{24}{11.7}$ de seconde, dont le quarré multipliant 15,1 pieds, donne 1,00409 lig. pour l'abaissement du boulet lorsqu'il a rencontré la regle BC. Cette quantité ajoutée avec $gi = 2^{\text{po.}} 6^{\text{li.}}$ donne $2^{\text{po.}} 7,00409$ ou $2,58367^{\text{po.}}$ pour la nouvelle tangente de l'angle de projection, en prenant 24 pieds, ou 288 pouces pour rayon. Le logarithme de cette tangente est 7,9528449, qui répond à un angle de $0^{\circ} 30' 50''$. Cette nouvelle tangente mise dans les formules $\frac{bb+bb+cc}{4tb+4c}$ & $\sqrt{\frac{tb+c}{15}}$, avec les quantités $b = 1377$, & $c = 11,0625$; on trouvera une vitesse de 1106 pieds par seconde, & le tems de $1,249''$: c'est 11 pieds de moins que la premiere vitesse. Si, par un pareil procédé, on vouloit encore corriger la derniere vitesse de 1106 pieds par seconde, on trouveroit qu'il n'y a pas quatre pouces à en retrancher, & que l'on peut par conséquent s'en tenir à la premiere correction. Nous verrons même que, dans le même cas, il y a moins de 11 pieds à ôter de la premiere vitesse quand on considère la résistance de l'air.

Il est à remarquer aussi que la direction du canon n'influe en rien sur les procédés de cette expérience, & qu'ainsi l'on peut lui donner telle inclinaison qu'on voudra, pourvu que l'on connoisse la situation du point m à l'égard de la

tête des deux piquets P & Q : ayant mené l'horizontale *mi*, la quantité dont l'empreinte du bas du boulet sur la règle BC sera élevée au dessus de cette horizontale prise pour rayon, sera la tangente de l'angle de projection. La direction horizontale n'a d'autre avantage que de donner des portées plus petites, & par cette raison plus faciles à mesurer.

De la ligne de mire.

70. Quoiqu'il arrive rarement que le boulet suive, en partant, la direction de l'axe du canon; cependant, comme il n'est pas possible de prévoir quel sera l'angle de départ du boulet, on est obligé de supposer dans la théorie que cet angle ne diffère point de celui que l'axe de la pièce forme avec l'horizon, & de déterminer en conséquence la position de la ligne de mire relativement à l'objet que l'on veut atteindre. La position naturelle de cette ligne sur le canon est déterminée, comme on l'a dit (§. 63), par les points les plus saillans & les plus élevés de la plate-bande de culasse, & du plus grand renflement de la bouche; de manière qu'elle est inclinée vers l'axe de la pièce, qu'elle le rencontre à une certaine distance de la bouche du canon, & s'en éloigne ensuite à mesure qu'elle se prolonge.

71. Pour trouver le point où la ligne de mire rencontre l'axe du canon, & la quantité dont elle s'abaisse au dessous de cet axe à diverses distances, il est nécessaire de connaître trois dimensions de la pièce : son diamètre à l'extrémité de la culasse; son diamètre au plus grand renflement de la bouche, & la partie de la longueur du canon comprise entre ces deux diamètres. Cette dernière quantité

n'est point ordinairement donnée dans les tables des dimensions; mais par des mesures prises sur les pièces, on trouve que le point le plus élevé du renflement est éloigné de la bouche d'environ un tiers du diamètre du boulet. Soit donc le canon AB (fig. 16.), dont l'axe est dirigé suivant la droite $ABCD$: si, par les points les plus élevés G, H de la culasse & du renflement de la bouche, on fait passer une droite $GHCF$, ce sera la ligne de mire, ou le rayon visuel dans sa situation naturelle. Des points G & H soient abaissées sur l'axe AB les perpendiculaires GA, HB , qui sont connues par les dimensions de la pièce, ainsi que leur intervalle AB . Soit mené Hi parallèle à AB , les triangles semblables GiH, HBC donnent $Gi : iH :: HB : BC$; faisant donc $AG = m$; $BH = n$ & $AB = Hi = l$, on aura la distance $BC = \frac{nl}{m-n}$. Si l'on suppose ensuite que le but, ou l'objet que l'on veut frapper, est dans une droite DF parallèle à BH , on comparera les triangles semblables HBC, DCF , qui donnent $BC : CD :: BH : DF$; c'est-à-dire, en faisant $BD = d$, $\frac{nl}{m-n} : d - \frac{nl}{m-n} :: n : DF = \frac{d(m-n)}{l} - n$. Ainsi, à la distance d de la bouche du canon, la ligne de mire s'abaisse au dessous de la direction de l'axe, d'une quantité exprimée par $\frac{d(m-n)}{n} - n$. Il n'y a aucun inconvénient à supposer DF verticale, lorsque la pièce fait un angle très-aigu avec l'horizon.

72. L'angle ACG que la ligne de mire forme avec l'axe de la pièce étant égal à l'angle $GH i$, sa tangente sera exprimée par $\frac{Gi}{iH} = \frac{m-n}{l}$, en supposant le rayon $= r$. (§. 4).

73. La table suivante contient les dimensions des pièces qui influent sur la justesse du tir, savoir: le demi-dia-

metre à l'extrémité de la culasse ; le demi-diametre au plus grand renflement de la bouche, & leur distance évaluée à la longueur du canon moins le tiers du diametre du boulet : ce sont les valeurs des lettres m , n & l exprimées en pouces & décimales de pouce. La quatrième colonne indique la distance à la bouche du canon du point où la ligne de mire rencontre l'axe de la piece, ou les valeurs de $\frac{n l}{m - n}$ exprimées en pieds & décimales de pied. Enfin la cinquième colonne renferme les angles que la ligne de mire forme avec l'axe de la piece, & dont les tangentes sont $\frac{m - n}{l}$. Cette table a été calculée d'après les dimensions prescrites par le règlement de 1769 ; & comme il existe encore un grand nombre de bouches à feu construites suivant l'ordonnance de 1733, on a cru devoir présenter les mêmes dimensions conformément à cette ordonnance.



TABLE I.

Calibres.	Demi-diametres		Interval ^{le} . entre ces deux demi- diametres.	Distances du point de rencontre de la ligne de mire avec l'axe.	Angles de la ligne de mire avec l'axe.
	A l'ex- trémité de la culasse.	Au ren- flement de la bouche.			
1769. Pices de siege, de bataille.	24	po. 9,02 po. 6,45	po. 117,63	pi. 24,61	1 15 6
	16	7,90 5,65	113,18	23,63	1 8 20
	12	7,17 5,13	106,89	22,37	1 5 36
	8	6,27 4,48	96,52	20,11	1 3 45
	12	6,23 4,93	76,53	24,13	0 58 23
	8	5,44 4,30	66,72	21,07	0 58 44
	4	4,31 3,40	52,99	16,64	0 59 2
1733.	24	po. 8,91 po. 6,45	po. 117,63	pi. 25,67	1 11 53
	16	7,80 5,64	113,18	24,72	1 5 36
	12	7,08 5,12	106,89	23,31	1 3 2
	8	6,19 4,48	96,52	21,06	1 0 54
	4	4,91 3,55	80,00	17,46	0 58 26

74. Dans la table suivante se trouvent les abaiffemens de la ligne de mire au dessous de la direction de l'axe du canon ; ou les valeurs numériques en pieds & décimales de pied de l'expression $\frac{d(m-n)}{l} - n$, relativement aux différens calibres des pices & pour différentes distances du but , depuis 60 jusqu'à 400 toises. Cette table a été calculée d'après les dimensions prescrites par le règlement de 1769. Il peut se faire que ces dimensions ne soient pas exactement observées dans la fabrication des pices ; mais quand les valeurs de m ou de n seroient d'une ligne

trop grandes ou trop petites, il n'en pourroit résulter qu'une erreur de 3 à 20 pouces depuis la distance de 60 toises, jusqu'à celle de 400.

TABLE II.

Des abaiffemens de la ligne de mire au dessous de la direction de l'axe du canon.

Distances.	Pièces de siege ,				de bataille.		
	24	16	12	8	12	8	4
to.	pi.	pi.	pi.	pi.	pi.	pi.	pi.
60	7,32	6,70	6,45	6,31	5,71	5,77	5,85
80	9,94	9,09	8,74	8,54	7,76	7,81	7,90
100	12,57	11,48	11,03	10,77	9,80	9,85	9,94
120	15,19	13,87	13,32	13,00	11,84	11,89	11,99
140	17,81	16,25	15,62	15,22	13,88	13,93	14,03
160	20,43	18,64	17,91	17,45	15,92	15,98	16,07
180	23,05	21,03	20,20	19,68	17,96	18,02	18,12
200	25,67	23,42	22,49	21,91	20,01	20,06	20,16
220	28,29	25,81	24,78	24,13	22,05	22,10	22,21
240	30,91	28,20	27,08	26,36	24,09	24,14	24,25
260	33,54	30,59	29,37	28,59	26,13	26,18	26,30
280	36,16	32,98	31,66	30,81	28,17	28,22	28,34
300	38,78	35,37	33,95	33,04	30,21	30,26	30,38
320	41,41	37,76	36,24	35,27	32,26	32,31	32,43
340	44,03	40,14	38,53	37,50	34,30	34,35	34,47
360	46,65	42,53	40,82	39,72	36,34	36,39	36,51
380	49,28	44,91	43,11	41,95	38,38	38,43	38,56
400	51,90	47,30	45,40	44,18	40,42	40,47	40,60

75. Si le boulet parcouroit une ligne droite suivant la direction de l'ame de la pièce, il est clair qu'il faudroit diriger le canon de façon que la ligne de mire tombât au dessous du but que le boulet doit frapper, de la quan-

tité indiquée dans cette table, pour le calibre & la distance donnés : mais ce cas ne peut jamais arriver ; le boulet s'abaisse de plus en plus au dessous de la direction de l'axe du canon à mesure qu'il s'éloigne ; il faut donc connoître ces abaiffemens ou chûtes du boulet , pour diriger en conséquence la ligne de mire au dessus ou au dessous du but.

La table suivante contient les différens abaiffemens du boulet, relativement au tems qu'il met à parcourir un espace donné ; les calculs de cette table sont fondés sur ce que les hauteurs des chûtes sont proportionnelles aux quarrés des tems , & sur la supposition que durant la premiere seconde de sa chûte un corps descend de 15,1 pieds.

TABLE III.

Des abaiffemens du boulet en différens tems.

Tems.	Abaiffem ^s .	Tems.	Abaiffem ^s .	Tems.	Abaiffem ^s .
"	pi.	"	pi.	"	pi.
0,1	0,15	1,1	18,27	2,1	66,59
0,2	0,60	1,2	21,74	2,2	73,08
0,3	1,36	1,3	25,52	2,3	79,88
0,4	2,42	1,4	29,59	2,4	86,97
0,5	3,77	1,5	33,97	2,5	94,37
0,6	5,44	1,6	38,65	2,6	102,08
0,7	7,40	1,7	43,64	2,7	110,08
0,8	9,66	1,8	48,92	2,8	118,38
0,9	12,23	1,9	54,51	2,9	126, 9
1,0	15,10	2,0	60,40	3,0	135,90

76. Connoissant donc le tems qu'un boulet met à parcourir un des espaces de la premiere table, on trouvera

par le moyen des deux, comment il faut diriger la ligne de mire: si l'on fait, par exemple, qu'un boulet de 24 met deux secondes & deux dixièmes de seconde à parcourir 100 toises, on voit par la dernière table, que dans ce tems le boulet s'abaisse de 21,74 pieds; & comme la première table indique qu'à cette distance, la ligne de mire s'abaisse de 25,67 pieds, on conclura que cette ligne doit être dirigée à 3,93 pieds au dessous du but pour que le boulet puisse le frapper. En général, le canon doit toujours être pointé au dessous du but, lorsque l'abaissement du boulet est moindre que celui de la ligne de mire, d'une quantité égale à la différence de ces deux abaissemens; & au dessus dans le cas contraire; mais dans ce dernier cas il vaut mieux se servir du but en blanc, comme nous verrons ci-après.

77. Cette théorie bien entendue, on ne sera plus étonné que, pour certaines positions du but, il faille diriger la ligne de mire, de manière qu'elle plonge à terre à une grande distance du but. En voici un exemple: que le canon A (fig. 17.), & le but F soient élevés l'un & l'autre de quatre pieds au dessus d'un terrain horizontal; que leur distance soit de 160 toises; le canon une pièce de bataille du calibre de 12, & la vitesse du boulet de 1200 pieds par seconde. Le tems employé à parcourir cet espace sera de 0,8 de seconde; l'abaissement du boulet à cette distance est donc de 9,66 pieds, & celui de la ligne de mire de 15,92 pieds: d'où l'on voit que cette ligne doit être dirigée à 6,26 pieds au dessous du but; mais ce but n'étant élevé que de 4 pieds, il est clair qu'au pied du but la ligne de mire doit être enfoncée en terre de 2,26 pieds. Pour trouver le point P où elle rencontre la surface du terrain, on

abaîssera de l'extrémité B du canon la verticale BE; les triangles semblables BEP, HPG donnent $BE:GH::EP:PG$; ou $BE+GH:GH::EG:PG$, & en nombres, $6,26:2,26::160:PG=57,76$ toises, c'est-à-dire que la ligne de mire doit être dirigée de manière qu'elle plonge à terre à environ 57 toises du but. Une plus grande vitesse du boulet éloigneroit encore plus le point P du but.

De l'angle de projection.

78. Nous avons dit (§. 29.) que l'angle de projection étoit, en général, celui que l'axe d'une arme à feu forme avec l'horizon : dans le tir du canon, au lieu de rapporter cet angle à l'horizon, il est souvent plus commode de considérer l'inclinaison de la pièce relativement à la droite qu'on imagine tirée de la bouche du canon au but, ou à l'objet que l'on se propose d'atteindre; ce qui revient à la définition générale de l'angle de projection, lorsque le but est au niveau de la batterie.

Si l'on connoît la vitesse du boulet & la situation du but par rapport à la batterie, on trouvera quel doit être l'angle de projection relativement à l'horizon, ou la tangente de cet angle, par l'équation $t = \frac{2a \pm \sqrt{(4aa - bb \mp 4ac)}}{b}$. (§. 30.) Comme on ne tire ordinairement le canon que sous des angles très-aigus, il suffira de prendre $t = \frac{2a - \sqrt{(4aa - bb \mp 4ac)}}{b}$. Dans cette expression, le terme $4ac$ a le signe — quand le but est au dessus du niveau de la batterie; le signe + quand il est au dessous; & l'on a $4ac = 0$ quand il est au même niveau. L'angle de projection horizontal étant trouvé, on connoîtra celui que l'axe de la pièce forme avec la droite menée de la bouche du canon au but; l'expression de la tangente de cet angle étant $\frac{bt \mp c}{b \pm ct}$, (§. 36.) avec le signe

supérieur pour la première position du but, & l'inférieur pour la seconde. Cet angle n'est autre chose que la différence ou la somme de deux angles dont l'un a t pour tangente, & l'autre $\frac{c}{b}$. (§. 4.)

Supposons, par exemple, qu'on veuille atteindre un objet éloigné de la batterie de 150 toises, & élevé de 27 pieds au dessus du niveau de cette batterie, avec une pièce de 16, dont le boulet a une vitesse de 384 pieds par seconde : ayant mis dans l'équation $t = \frac{2a - \sqrt{(4aa - bb - 4ac)}}{b}$ les valeurs de $b = 900$ pieds ; $c = 27$ & $a = 2458$, on trouvera $lt = 9,0896854$ qui est le log. tangente d'un angle de 7 degrés ; si de cet angle on retranche celui qui a $\frac{c}{b}$ pour tangente, on aura $5^{\circ} 17'$ pour l'angle formé par l'axe de la pièce & la droite tirée de la bouche du canon au but. Il n'est plus question que de donner à la pièce de canon l'inclinaison indiquée par cet angle.

79. Pour diriger une pièce de canon suivant l'angle que son axe doit former avec l'horizon, on peut se servir d'un quart de cercle pareil à ceux dont on faisoit autrefois usage dans les batteries de mortier : on introduit à cet effet dans l'ame du canon une règle bien dressée des deux côtés, de façon qu'il en reste une partie en dehors ; sur cette partie extérieure, qui doit être dans la direction de la pièce, on pose le quart de cercle, & l'on incline la pièce jusqu'à ce que le fil à plomb soit sur le degré que l'on demande. S'il s'agit d'expériences qui exigent une grande précision, on emploiera le quart de cercle dont la description se trouve à la fin de la Géométrie de M. Bézout. Mais ces moyens n'étant point praticables à la guerre, nous allons proposer une autre méthode plus simple & d'un usage facile pour donner à une pièce l'inclinaison qu'elle doit avoir sur la

ligne menée du canon au but, sans nous embarrasser de son inclinaison à l'horizon.

- 80. Soit le canon AB (fig. 18.), dont l'axe est dirigé suivant la droite ABC , & la ligne de mire suivant GHC : menez la droite BF , de la bouche du canon au but que l'on veut atteindre : lorsque la ligne de mire aboutit au même but F , il est clair que l'angle CBF que l'axe de la pièce forme avec BF , est égal à l'angle HCB qu'il forme avec la ligne de mire, moins l'angle CFB qui a son sommet au but F , & s'appuie sur le demi-diamètre BH de la pièce au plus grand renflement de la bouche. Mais ce dernier angle est toujours très-petit; puisque pour la pièce de 24, le but étant éloigné de 100 toises, il n'est que d'environ trois minutes : on peut donc le négliger dans la pratique, & regarder l'angle CBF comme égal à l'angle HCB .

81. Si cependant l'on veut avoir égard à l'angle CFB , on pourra consulter la table suivante, qui contient les valeurs de cet angle pour tous les calibres, & pour différentes distances du but, depuis 60 jusqu'à 300 toises.



TABLE IV.

Des angles qui ont leur sommet au but & s'appuient sur le demi-diametre de la bouche du canon.

Distances du but.	Pièces de siege,				de bataille.		
	24	16	12	8	12	8	4
toi.	''	''	''	''	''	''	''
60	5 8	4 30	4 5	3 34	3 55	3 25	2 42
80	3 51	3 22	3 4	2 40	2 57	2 34	2 2
100	3 5	2 42	2 27	2 8	2 21	2 3	1 37
120	2 34	2 15	2 2	1 47	1 58	1 42	1 21
140	2 12	1 55	1 45	1 32	1 41	1 28	1 10
160	1 55	1 41	1 32	1 20	1 28	1 17	1 1
180	1 42	1 30	1 22	1 11	1 18	1 8	0 54
200	1 32	1 21	1 14	1 4	1 11	1 2	0 49
220	1 24	1 14	1 7	0 58	1 4	0 56	0 44
240	1 17	1 7	1 1	0 53	0 59	0 51	0 40
260	1 11	1 2	0 56	0 49	0 54	0 47	0 37
280	1 6	0 58	0 52	0 46	0 50	0 44	0 35
300	1 2	0 54	0 49	0 43	0 47	0 41	0 33

L'angle CBF étant connu par le §. 71, on connoitra l'angle HCB, soit qu'on le suppose égal à CBF, soit que, pour plus de précision, on le suppose égal à $CBF + CFB$, ce dernier étant connu par la table précédente pour le calibre & la distance donnés. Mais, nous le répétons, on peut négliger l'angle CFB, moins à cause de sa petitesse, que parce que le boulet s'élève presque toujours au dessus de l'axe du canon (§. 68.).

82. Cela posé, la ligne de mire va nous servir à donner à la pièce de canon l'inclinaison qu'elle doit avoir. Lors-

que cette ligne est dans sa situation naturelle, c'est-à-dire lorsqu'elle passe sur la plate-bande de culasse & sur le plus grand renflement de la bouche, elle forme avec l'axe du canon l'angle HCB (fig. 18.), dont les différentes valeurs relativement au calibre se trouvent dans la table I; de sorte que si, dans cette situation, la ligne de mire est dirigée sur l'objet F que l'on veut frapper, l'axe de la pièce formera un angle égal avec la droite BF menée de la bouche du canon à l'objet F . Mais si cet angle CBF doit être plus grand que celui que l'on trouve dans la table I pour un calibre donné, il faudra que la ligne de mire, pour faire le même angle avec l'axe de la pièce, soit élevée du côté de la culasse d'une certaine quantité GI (fig. 19) qu'il sera facile de connoître : car faisant, comme ci-dessus, $AB = l$; $AG = m$, $BH = n$, & nommant T la tangente de l'angle connu HCB , on aura $BC = \frac{n}{T}$, & $AC = l + \frac{n}{T}$. Or les triangles semblables CBH , CAI donnent $CB : BH :: CA : AI$, ou $\frac{n}{T} : n :: l + \frac{n}{T} : AI$; donc $AI = Tl + n$, retranchant $AG = m$, on aura $GI = Tl - (m - n)$. Si on élève donc la ligne de mire du côté de la culasse, d'une quantité $GI = Tl - (m - n)$, & qu'en la faisant passer sur le point H , on la dirige sur l'objet F , la pièce aura l'inclinaison qu'elle doit avoir, puisque son axe fait alors avec la droite BF l'angle que l'on demande.

83. La connoissance des divers haussiemens de la ligne de mire pouvant être utile dans la pratique; nous avons calculé la table suivante qui présente ces haussiemens relativement aux angles que la ligne de mire doit former avec l'axe de la pièce, ou à ceux que cet axe doit former avec la droite menée du canon au but,

TABLE V.

Des haussmens de la ligne de mire relativement aux angles qu'elle forme avec l'axe du canon.

Angles de la ligne de mire avec l'axe du canon.	Haussmens de la ligne de mire.							
	Pièces de siege ,				de bataille.			
	24	16	12	8	12	8	4	
	po. li.	po. li.	po. li.	po. li.	po. li.	po. li.	po. li.	
0 58 23	...	...	...	...	0 0	...	...	
0 58 44	...	...	...	...	0 0	0 0	...	
0 59 2	...	...	...	...	0 0	0 0	0 0	
1 3 45	...	...	...	0 0	0 1	0 1	0 1	
1 5 36	...	...	0 0	0 1	0 2	0 2	0 1	
1 8 20	...	0 0	0 1	0 2	0 3	0 2	0 2	
1 15 0	...	0 3	0 4	0 4	0 4	0 4	0 3	
1 15 6	0 0	0 3	0 4	0 4	0 4	0 4	0 3	
1 30 0	0 6	0 9	0 9	0 9	0 8	0 7	0 6	
1 45	1 0	1 2	1 3	1 2	1 0	0 11	0 9	
2 0	1 6	1 8	1 8	1 7	1 4	1 3	1 0	
2 15	2 1	2 2	2 2	2 1	1 8	1 6	1 5	
2 30	2 7	2 8	2 7	2 6	2 0	1 10	1 5	
2 45	3 1	3 2	3 1	2 11	2 4	2 2	1 8	
3 0	3 7	3 8	3 7	3 3	2 8	2 5	1 10	
3 15	4 1	4 2	4 1	3 8	3 0	2 5	2 1	
3 30	4 7	4 8	4 6	4 1	3 5	3 0	2 4	
3 45	5 1	5 2	5 0	4 6	3 9	3 3	2 7	
4 0	5 7	5 8	5 5	4 11	4 1	3 7	2 10	
4 15	6 2	6 2	5 10	5 4	4 5	3 10	3 0	
4 30	6 8	6 8	6 4	5 9	4 9	4 2	3 3	
4 45	7 2	7 2	6 10	6 2	5 1	4 5	3 6	
5 0	7 8	7 8	7 4	6 8	5 5	4 9	3 9	
5 15	8 2	8 2	7 10	7 1	5 9	5 0	4 0	
5 30	8 9	8 8	8 3	7 6	6 1	5 4	4 2	
5 45	9 3	9 2	8 9	7 11	6 5	5 7	4 5	
6 0	9 9	9 8	9 3	8 4	6 9	5 11	4 8	

Angles de la ligne de mire avec l'axe du canon.	Hauteur de la ligne de mire.							
	Pièces de siège,				de bataille.			
	24	16	12	8	12	8	4	
	po. li.	po. li.	po. li.	po. li.	po. li.	po. li.	po. li.	
6 15	10 3	10 2	9 8	8 9	7 1	6 2	4 11	
6 30	10 10	10 8	10 2	9 2	7 5	6 6	5 2	
6 45	11 4	11 2	10 7	9 7	7 9	6 9	5 4	
7 0	11 10	11 8	11 1	10 0	8 1	7 1	5 7	
7 15	12 4	12 2	11 6	10 5	8 5	7 5	5 10	
7 30	12 11	12 8	12 0	10 10	8 9	7 8	6 1	
7 45	13 5	13 2	12 6	11 3	9 1	8 0	6 4	
8 0	13 11	13 8	12 11	11 8	9 5	8 3	6 6	
8 15	14 6	14 2	13 5	12 4	9 10	8 7	6 9	
8 30	15 0	14 8	13 11	12 9	10 2	8 10	6 11	
8 45	15 6	15 2	14 5	13 2	10 6	9 2	7 2	
9 0	16 0	15 8	14 11	13 7				
9 15	16 7	16 2	15 5	14 0				
9 30	17 1	16 8	15 10	14 5				
9 45	17 8	17 2	16 4	14 10				
10 0	18 2	17 8	16 10	15 3				
10 15	18 8	18 3	17 4	15 8				
10 30	19 3	18 9	17 9	16 1				
10 45	19 9	19 3	18 3	16 7				
11 0	20 4	19 9	18 9	17 0				
11 15	20 10	20 3	19 3	17 5				
11 30	21 4	20 9	19 9	17 10				
11 45	21 11	21 3	20 3	18 3				
12 0	22 5	21 10	20 8	18 9				

NOTA. Si la ligne de mire est horizontale, il est clair que les angles compris dans la première colonne de cette table, sont les angles d'inclinaison de la pièce par rapport à l'horizon, c'est-à-dire les angles de projection, qu'il est d'ailleurs facile de déduire des mêmes tables, quand la ligne de mire est inclinée d'une quantité connue.

84. Rien de plus simple que l'usage qu'on peut faire de cette table pour donner à une pièce de canon telle inclinaison qu'on voudra. Aux pièces de bataille on se sert de la hausse adaptée à la culasse, par le moyen de laquelle on peut élever la ligne de mire, de deux lignes en deux lignes, jusqu'à la hauteur de 18 lignes : l'usage de ces hausses est donc borné à neuf inclinaisons, dont la plus grande n'est que d'environ $2^{\circ} 30'$; ce qui peut suffire pour le service de campagne (*) : mais cette méthode a besoin d'une plus grande extension pour pouvoir être appliquée aux canons de siège, auxquels on est quelquefois obligé de donner une inclinaison beaucoup plus grande : il n'est pas nécessaire que la hausse soit fixée à la culasse ; un pied-de-roi, un bout de baguette ou un brin de fascine coupés

(*) Depuis quelques années on se sert pour les pièces de campagne d'une nouvelle hausse divisée en lignes, que l'on peut fixer à tous les degrés, depuis une jusqu'à dix-huit lignes, au moyen d'une vis de pression. Une pareille hausse vient aussi d'être adaptée à la culasse des obusiers ; sans doute d'après ce que j'ai observé que le tir des canons & obusiers pouvoit presque toujours s'exécuter par le moyen du but en blanc, soit naturel, soit artificiel ; & que la hausse étant d'un usage plus sûr & plus commode que le quart de cercle, la manière de pointer devoit être commune aux canons & aux obusiers. Il est donc à propos, pour compléter les deux dernières tables, d'en joindre ici deux pour les obusiers ; en prévenant que selon les dimensions actuelles, on a

pour l'obusier de 8 po. $l = 34 \text{ po li}$; $m = 6 \text{ po li pt}$; $n = 6 \text{ po li pt}$;
 & pour celui de 6 po. $l = 27 \text{ po li pt}$; $m = 5 \text{ po li}$; $n = 5 \text{ po li pt}$;

done au premier $m - n = 0$, & au second $m - n = 0,063$. De sorte que ces deux armes n'ont point de but en blanc naturel, &

d'une longueur convenable peuvent en tenir lieu (*); il suffit de les placer sur le point le plus élevé de la plate-bande de culasse, perpendiculairement à la longueur de la pièce, & d'incliner ensuite cette pièce de façon que la ligne de mire passant par l'extrémité supérieure de la baquette, & sur le renflement de la bouche, soit dirigée sur l'objet que l'on veut frapper, on aura alors l'inclinaison relative à l'élévation de cette espèce de hausse. Ainsi, pour donner à la pièce de 16 l'inclinaison de $5^{\circ} 17'$ trouvée

que par une singularité dont on ne voit point le motif, l'obusier de 6 po. a son diamètre extérieur à la plate-bande de la culasse moindre qu'à celle de la volée.

*Suite de la table IV
pour les obusiers.*

Distances du but.	Obusiers	
	de 8 po	de 6 po
to.	" "	" "
60	5 28	4 25
70	4 41	3 48
80	4 6	3 19
90	3 39	2 57
100	3 17	2 40
110	2 59	2 25
120	2 44	2 13
130	2 31	2 3
140	2 21	1 54
150	2 12	1 46
160	2 4	1 39
170	1 56	1 34

*Suite de la table V
pour les obusiers.*

Angles de la ligne de mire avec l'axe de l'obusier.	Hauffemens.	
	Obusiers	
	de 8 po	de 6 po
	li pt	li pt
0 15	1 9	2 3
0 30	3 7	3 9
0 45	5 4	5 2
1 0	7 2	6 7
1 15	9 0	8 0
1 30	10 9	9 6
1 45	12 6	11 0
2 0	14 3	12 5
2 15	16 1	13 10
2 30	17 11	15 3
2 45	19 9	16 9
3 0	21 7	18 3

(*) Voyez dans l'instruction sur l'usage de nos tables du tir des canons & obusiers, la description d'une hausse très-commode.

ans le dernier exemple, il faut, suivant la table V, une hausse entre 8 po. 2 li. & 8 po. 8 li. ou d'environ 8 po. 2 li. 1 p^{te}.

85. Il nous reste à parler d'une autre méthode pour connoître l'angle d'inclinaison d'une piece, par les différentes positions qu'elle peut avoir sur son affut; ou pour donner à une piece la position qui lui convient relativement à une inclinaison donnée. Soit A le milieu de l'axe des tourillons; c'est sur cet axe que la piece tourne pour prendre diverses inclinaisons; AC une droite parallele à l'axe du canon, terminée en C à l'extrémité de la culasse; B le point le plus bas de la plate-bande de culasse: ce point est toujours appuyé sur la semelle de l'affut, ou sur le coin de mire; ayant mené AB & BC, on aura le triangle ABC rectangle en C, & entièrement connu par les dimensions de la piece. Si par le point A on mène la verticale AD, & par le point B l'horizontale BD, le triangle ABD sera aussi connu: il suffira pour cela de mesurer la quantité AD, dont le point A est plus ou moins élevé que le point B. Connoissant donc les angles BAC, ABD, l'angle d'inclinaison de la piece sera égal à leur différence lorsque le point D est plus bas que le point A, fig. 20 & 21; & à leur somme lorsqu'il est plus haut, fig. 22. Dans le premier cas, la piece est pointée au dessus de l'horizontale lorsque AD est plus grand que BC, fig. 20, & au dessous lorsque AD est plus petit que BC, fig. 21, ce qui a lieu aussi quand l'horizontale BD passe au dessus du point A, fig. 22. Enfin la piece est dirigée horizontalement, si $AD = BC$ dans les fig. 20 & 21.

Il ne s'agit donc plus que de s'assurer, dans les différentes positions de la piece sur son affut, de la quantité

AD, dont le point A est plus ou moins élevé que le point B. Mais comme les moyens propres à se procurer cette connoissance ne peuvent qu'être embarrassans dans la pratique, nous bornerons l'usage de cette méthode à trouver la plus grande inclinaison que la piece puisse avoir sur son affut, en supposant la ligne de terre horizontale, ou la plate-forme de niveau. Soit une piece de 24, dont les dimensions donnent $AB = 48,904$ pouces; $BC = 6,2986$ pouces, & par conséquent l'angle BAC de $7^{\circ} 24'$. Lorsque la culasse est appuyée sur la semelle, fig. 20, ce qui met la piece dans le cas de la plus grande inclinaison, le tracé de l'affut donne $AD = 16,333$ pouces, & l'angle ABD de $19^{\circ} 31'$; donc l'angle de la plus grande inclinaison, que la piece puisse avoir sur son affut, & qui est la différence des deux angles ABD, BAC, fera de $12^{\circ} 7'$. Si l'affut est sur une plate-forme inclinée, dont la pente soit par exemple de 4 pouces sur 12 pieds, il en résultera un angle de $1^{\circ} 35'$ qu'il faudra retrancher de $12^{\circ} 7'$, & l'on aura $10^{\circ} 32'$ pour l'angle de la plus grande inclinaison de la piece.

Du tir du canon de but en blanc.

86. Le chemin que parcourt un boulet lancé par le canon, est, comme on l'a déjà dit §. 25, une ligne courbe dont l'origine est à la bouche du canon, & qui, au même endroit, a l'axe de la piece pour tangente: de sorte que la courbe décrite par le boulet est toute entière au dessous du prolongement de l'axe de la piece, & s'en écarte de plus en plus, en s'abaissant par l'action de la pesanteur, à mesure que le boulet s'éloigne du canon. Cette courbe est coupée par la ligne de mire en deux points, dont l'un est

ordinairement trop près du canon pour qu'il soit nécessaire de le considérer ; l'autre est plus éloigné & mérite seul notre attention. Il est clair que pour une même courbe le premier de ces points se rapproche du canon , & le second s'en éloigne d'autant plus , que la ligne de mire forme un plus grand angle avec l'axe de la pièce. C'est ce qu'indique suffisamment la fig. 19, sans qu'il soit besoin d'une plus ample explication.

87. Pointer une pièce de canon de but en blanc, c'est la diriger de manière que la ligne de mire aille rencontrer le but que l'on veut frapper , quelque soit d'ailleurs l'inclinaison de cette ligne à l'égard de l'axe du canon. Le point qui détermine le but en blanc est donc l'intersection la plus éloignée de la ligne de mire & de la courbe décrite par le boulet. La distance du canon à ce point s'appelle *portée de but en blanc*.

88. Lorsque la ligne de mire est dans sa situation naturelle , c'est-à-dire quand elle rase la surface extérieure du canon , en passant par les points les plus élevés de la plate-bande de culasse , & du renflement de la bouche , il en résulte ce qu'on appelle *but en blanc primitif ou naturel de la pièce*. Celui que donne toute autre position de la ligne de mire peut être nommé *but en blanc artificiel*. On obtient ce dernier en faisant passer la ligne de mire sur l'un des deux points dont on vient de parler , & en le haussant au dessus de l'autre d'une quantité déterminée par l'angle qu'elle doit former avec l'axe de la pièce , ou , ce qui revient au même , par l'angle que cet axe fait avec la droite menée de la bouche du canon au but que l'on veut atteindre ; ces deux angles , comme on l'a vu §. 80, pouvant être censés égaux entre eux.

89. Le tir du canon peut presque toujours s'exécuter par le moyen du but en blanc soit naturel, soit artificiel : il est même à propos, pour la justesse du tir, d'employer cette méthode préférablement à toute autre ; parce qu'elle donne toujours deux points fixes pour déterminer la position de la ligne de mire, qu'il est ensuite facile de diriger sur l'objet que l'on se propose d'atteindre.

90. La portée du but en blanc naturel d'une pièce de canon dépend, 1°. de la vitesse du boulet, ou de la charge de poudre. 2°. De l'angle que la ligne de mire forme avec l'axe du canon. 3°. De l'inclinaison de la pièce sur l'horizon. Voyons quelle est l'influence de chacune de ces quantités sur la portée du but en blanc.

91. Soit le canon AB (fig. 23) dont l'axe ABCE forme avec l'horizontale BD un angle donné EBD ; ayant mené la ligne de mire GHCF qui rencontre l'axe de la pièce au point C, la courbe décrite par le boulet aux points F & f, & l'horizontale BD au point I : la droite BF menée de la bouche du canon au point d'intersection F le plus éloigné, sera la portée de but en blanc, dont il faut trouver la valeur. On emploiera à cet effet l'équation générale $xx + ttxx = 4atx - 4ay$ trouvée au §. 27, dans laquelle t est la tangente de l'angle de projection EBD ; a , la hauteur due à la vitesse du boulet ; x , la distance horizontale BD du point F, & y la verticale FD. L'angle BIH est connu, puisqu'il est égal à l'angle de projection EBD moins l'angle de mire BCH ; on connoit aussi la ligne BC (§. 71.), on trouvera donc BI par la résolution du triangle BCI. Faisons $BI = k$, on aura $DI = x + k$; mais dans le triangle rectangle DIF, on a $DF = DI \times \text{tang. DIF}$ (§. 4.), donc en faisant tang.

DIF = T, on aura $y = T(x+k)$. Mettant cette valeur de y dans l'équation ci-dessus, on aura

$xx + tt xx = 4atx - 4aTx - 4aTk$, d'où l'on tire

$$x = \frac{2a(t-T)}{1+tt} \pm \sqrt{\left(\frac{4aa(t-T)^2}{(1+tt)^2} - \frac{4aTk}{1+tt}\right)}.$$

Le signe + devant le radical donne la valeur de x correspondante au point d'intersection F le plus éloigné du canon, & le signe — celle de Bd qui répond au point d'intersection f le plus voisin. De la valeur de BD on conclura celle de DI , & par conséquent celle de $FD = DI \times \text{tang. DIF}$; on connoitra donc la portée du but en blanc $BF = \sqrt{(\overline{BD}^2 + \overline{FD}^2)}$.

$$\text{L'équation } x = \frac{2a(t-T)}{1+tt} \pm \sqrt{\left(\frac{4aa(t-T)^2}{(1+tt)^2} - \frac{4aTk}{1+tt}\right)}$$

ne donne le but en blanc que pour une des positions que le canon peut avoir relativement à l'horizon, savoir celle où l'axe de la piece & la ligne de mire sont l'un & l'autre inclinés au dessus de l'horizontale BD , & qui est représentée par la fig. 23. Dans ce premier cas, nommant p l'angle de projection EBD , & q l'angle de mire BCH , on a $T = \text{tang. } (p-q)$; $k = \frac{BC \sin. q}{\sin. (p-q)}$; $y = T(x+k)$, & la portée du but en blanc $BF = \sqrt{xx + TT(x+k)^2}$.

2°. cas. Lorsque la ligne de mire $GHCF$ (fig. 24.) est parallèle à l'horizontale BD , on aura $t = \text{tang. } q$; T infiniment petit; k infiniment grand; $y = BH = n$; la valeur de BD sera $x = \frac{2at}{1+tt} \pm \sqrt{\left(\frac{4aat}{(1+tt)^2} - \frac{4an}{1+tt}\right)}$; & la portée de but en blanc $BF = \sqrt{xx + nn}$ ou simplement x .

3°. cas. Si la piece est dirigée de façon (fig. 24.) que son axe restant au dessus de l'horizontale BD , la ligne de

miroir passe au dessous de cette ligne en la coupant au point

I, on aura $T = \text{tang. } (q - p)$; $k = \frac{BC \sin. q}{\sin. (q - p)}$, & $y =$

$T(x - k)$, ce qui donne $x = \frac{2a(t + T)}{1 + tt} \pm \sqrt{\left(\frac{4aa(t + T)^2}{(1 + tt)^2} - \frac{4aTk}{1 + tt}\right)}$, & la portée de but en blanc BF =

$\sqrt{(xx + TT(x - k)^2)}$.

4^e. cas. Si la direction de l'axe du canon est horizon-

tale (fig. 26.) on aura $t = 0$; $T = \text{tang. } q$; $k = BC$, $y = T(x - k)$ par conséquent $x = 2aT \pm \sqrt{(4aaTT - 4aTk)}$, & la portée de but en blanc BF = $\sqrt{(xx + TT(x - k)^2)}$.

5^e. cas. Enfin, lorsque l'axe du canon & la ligne de

miroir passent l'un & l'autre au dessous de l'horizontale BD (fig. 27.) que la ligne de mire rencontre au point I; la

tangente t sera négative; on aura $T = \text{tang. } (p + q)$; $k =$

$\frac{BC \sin. q}{\sin. (p + q)}$; $y = T(x - k)$; donc $x = \frac{2a(T - t)}{1 + tt} \pm$

$\sqrt{\left(\frac{4aa(T - t)^2}{(1 + tt)^2} - \frac{4aTk}{1 + tt}\right)}$, & la portée de but en blanc

sera = $\sqrt{(xx + TT(x + k)^2)}$.

Nous ne ferons qu'indiquer les résultats du calcul appliqué à ces différens cas, en prenant pour exemple la pièce de 24 qui donne $q = 1^\circ 15' 6''$; $BC = 24,61$ pieds & $BH = n = 6,45$ po. = 0,5375 pieds, (voyez la table I), nous supposons la vitesse du boulet de 1200 pieds par seconde, ce qui donne $a = 24000$ pieds.

1^{er}. cas. Si l'angle de projection p est de 8 degrés, la portée de but en blanc BF se trouve de 2080,6 pieds, ou de 346,8 toises.

2^e. cas. Lorsque $p = q = 1^\circ 15' 6''$; on a BF = 2071,6 pi. = 345,3 to.

3°. cas. Si $p = 1$ degré, on a $BF = 2071,7$ pieds = 345,3 toises.

4°. cas. Si $p = 0$, BF sera de 2072,5 pieds, ou de 345,4 toises.

5°. cas. Si $p = 8$ degrés, & la tangente négative, la portée de but en blanc BF sera de 2126,1 pieds, ou de 354,3 toises.

92. On voit par ces résultats que pour une même pièce & la même vitesse du boulet, la portée du but en blanc augmente avec l'inclinaison du canon, & que pour le même angle de projection, cette portée est plus grande lorsque l'axe du canon plonge au dessous de l'horizontale, que lorsqu'il est dirigé au dessus. Mais on voit aussi que dans les bornes où est renfermé l'usage ordinaire du canon, la différence des portées du but en blanc se réduit à très-peu de chose, & qu'elle est beaucoup moindre que les erreurs auxquelles on est communément exposé dans la pratique. S'il étoit donc question de déterminer l'angle de mire relatif à une portée du but en blanc donnée, on pourroit se servir indifféremment, & sans erreur sensible, de l'une quelconque des équations précédentes, & employer dans tous les cas celle dont le calcul seroit le plus simple : telle est l'équation $x = \frac{2 a t}{1+t} \pm \sqrt{\left(\frac{4 a a t t}{(1+t)^2} - \frac{4 a n}{1+t}\right)}$ trouvée pour le second cas. Dans cette équation $t = \text{tang. } q$ représente la tangente de l'angle de mire que l'on cherche par le moyen de la portée du but en blanc, qui est connue & exprimée par x . On a donc $x x + t t x x = 4 a t x - 4 a n$, d'où l'on tire $t = \frac{2 a \pm \sqrt{(4 a a - x x - 4 a n)}}{x}$; ce qui donne l'angle de mire, en mettant le signe — devant

le radical. Cet angle étant connu , on trouve par la table V la hausse qu'il faut employer pour tirer de but en blanc à la distance donnée x .

Si l'on demande, par exemple , quel doit être l'angle de mire dans une piece de 24 , pour atteindre de but en blanc un objet éloigné de 400 toises, ou 2400 pieds , le boulet ayant une vitesse de 1200 pieds par seconde ? Cette vitesse donne $a = 24000$ pieds ; & le calibre de 24 donne $n = 0,5375$; mettant ces valeurs dans l'équation $t = \frac{2a - \sqrt{(4aa - xx - 4an)}}{x}$, on trouvera $\log. t = 8,6342468$ qui répond à un angle de $2^{\circ} 46'$; ce qui , selon la table V , exige une hausse de 3^{po} 1^{li} environ.

93. La portée de but en blanc d'une piece de canon peut encore se déterminer par une autre méthode indépendante des propriétés de la parabole : nous la donnons ici parce qu'elle sera employée dans la section suivante pour la solution du même problème.

Soit, comme ci-dessus , le canon AB (fig. 23.) incliné suivant une direction donnée BE , la ligne de mire GHCF qui rencontre en F la courbe décrite par le boulet , & par conséquent BF la portée du but en blanc. Nous pouvons supposer que cette droite & la courbe de projection terminée par les mêmes points ne diffèrent point entre elles , ou du moins assez peu pour que l'on puisse , sans erreur sensible , les représenter l'une & l'autre par la même lettre : car quand même l'angle de mire EBF seroit de 6 ou 7 degrés , la différence sur 300 toises n'auroit tout au plus qu'à 4 ou 5 toises. Soit donc la droite ou la courbe $BF = x$, & v la vitesse du boulet ; le mouvement étant supposé uniforme , $\frac{x}{v}$ sera le tems employé

à parcourir BF ou la courbe de projection. Or ce tems doit être égal à celui que le boulet mettroit à tomber de la hauteur EF par l'action de la pesanteur, & ce dernier tems est exprimé par $\sqrt{\frac{EF}{15}}$, dans l'hypothèse de 15 pieds parcourus dans la 1^{re}. seconde de sa chute; on a donc $\frac{x}{u} = \sqrt{\frac{EF}{15}}$, & $\frac{x^2}{u^2} = \frac{EF}{15}$. Mais $EF = ED - FD$; $ED = BD \text{ tang. } EBD$; & $FD = BD \text{ tang. } FBD$; donc $EF = BD (\text{tang. } EBD - \text{tang. } FBD)$. On a aussi $BD = BF \cos. FBD$; substituant ces valeurs dans l'équation $\frac{x^2}{u^2} = \frac{EF}{15}$, & mettant x à la place de BF, on aura $\frac{x^2}{u^2} = \frac{1}{15} x \cos. FBD (\text{tang. } EBD - \text{tang. } FBD)$; d'où l'on tire $x = \frac{1}{15} u^2 \cos. FBD (\text{tang. } EBD - \text{tang. } FBD)$. Quantité connue, puisque l'angle EBF peut être supposé égal à l'angle de mire HCB (§. 80), & qu'en le retranchant de l'angle d'inclinaison EBD, on a l'angle FBD.

Si la ligne de mire est horizontale, on aura l'angle $EBD = HCB$ (fig. 24.); $\text{tang. } FBD = 0$, & $\cos. FBD = 1$; donc dans ce cas la portée du but en blanc fera $x = \frac{u^2 \text{ tang. } HCB}{15}$.

Si la ligne de mire passe au dessous de l'horizontale BD, (fig. 25 & 27), on aura $x = \frac{1}{15} u^2 \cos. FBD (\text{tang. } FBD \pm \text{tang. } EBD)$; le signe + pour le cas indiqué par la fig. 25, & le signe - pour le cas de la fig. 27.

Afin de comparer ces formules avec les précédentes, nous supposerons l'angle de projection EBD de 8 degrés, ce qui, pour la pièce de 24, donne l'angle FBD de

$6^{\circ} 44' 54''$; si l'on a $u = 1200$, on trouvera $x = 2112,5$ pieds, ce qui donne une portée d'environ 32 pieds plus grande que par la première méthode. De pareilles différences ont aussi lieu pour les autres cas ; & cela doit être ainsi, parce que c'est de la courbe BF, & non de la droite qui en joint les extrémités que l'on trouve à peu près la valeur par cette dernière méthode. Nous remettons à la section suivante à entrer dans de plus grands détails sur ce sujet.

Du tir à ricochet.

94. La pratique du tir à ricochet consiste à charger & diriger une pièce de canon de manière que le boulet passe à un pied ou deux au dessus de la crête du parapet d'un ouvrage de fortification, pour plonger dans la branche que l'on veut enfler, & y détruire en roulant & bondissant tout ce qui peut se trouver sur son passage.

95. Il est évident que pour produire cet effet, 1°. le boulet doit avoir passé le point le plus élevé de la courbe de projection, avant d'arriver au parapet qu'il doit franchir : autrement il passeroit par dessus l'ouvrage dont on veut ruiner les défenses, & n'y causeroit aucun dommage. 2°. Il faut que le boulet tombe à terre sous un angle très-aigu, non-seulement pour qu'il ne s'enfonce point, mais encore afin qu'en se relevant il puisse décrire une nouvelle courbe, dont l'élévation dans la plus grande partie de son étendue, ne surpasse point celle des objets que l'on se propose d'atteindre. 3°. Le ricochet sera d'autant plus meurtrier dans ses effets, qu'avec les conditions qu'on vient d'énoncer, le boulet aura une plus grande vitesse, ou sera capable d'une plus forte impulsion.

C'est d'après ces conditions que nous allons résoudre plusieurs problèmes concernant le tir à ricochet. Exposons d'abord les principaux élémens qu'il est nécessaire de considérer & d'employer dans leurs solutions.

96. Soit le canon A (fig. 28) dirigé suivant la droite AQ; ABD une ligne horizontale passant par la bouche du canon; AMCH la courbe décrite par le boulet; R le parapet d'un ouvrage de fortification dont cette courbe doit raser la crête au point C; H un autre point où la même courbe rencontre le terre-plein du rempart représenté par l'horizontale RH. Des points C & H soient abaissées sur l'horizontale AD les perpendiculaires CB, HD; & du point M le plus élevé de la courbe soit mené l'axe MP, lequel prolongé en Q jusqu'à la première direction AQ, donne $PQ = 2 PM$. On vient de voir que pour l'effet du ricochet, il faut que la distance AP de la batterie à l'axe de la parabole, soit moindre que AB distance de la même batterie au parapet, mais en même tems plus grande que la moitié de cette distance, & que la direction du boulet, lorsqu'il tombe au point H, fasse un angle très-aigu avec l'horizontale RH. Il est aussi d'usage que la distance AB, ainsi que les deux verticales BC, DH soient connues. La trigonométrie, ou mieux encore le coup d'œil bien exercé, donnera la connoissance de AB & BC; à l'égard de la verticale DH, c'est par les profils ordinaires des ouvrages de fortification qu'on pourra la connoître, & l'on ne risquera point de se tromper de beaucoup en supposant le point H de 6 à 7 pieds moins élevé que le point C.

Cela posé, faisons $AP = x$; $PM = y$; $AB = b$; $BC = c$; $AD = d$; $DH = f$; la tangente de l'angle

de projection en $A = t$; & la tangente de l'angle de chute en $H = T$. Les propriétés de la parabole démontrées aux §. §. 18 & 19 donnent , 1°. $x = \frac{cdd - bbf}{2(c d - b f)}$; 2°. $y = \frac{c x x}{2 b x - b b} = \frac{f x x}{2 d x - d d}$; 3°. $t : T :: x : d - x$, & en substituant la valeur de x , $t : T :: c d d - b b f : c d d + b b f - 2 b d f$. 4°. D'un autre côté l'on a $t = \frac{2 y}{x} = \frac{c d d - b b f}{b d d - b b d}$; mettant cette valeur de t dans la dernière proportion , on aura , 5°. $1 : T :: b d d - b b d : c d d + b b f - 2 b d f$. Ces équations & proportions vont nous servir à résoudre les problèmes suivans.

Problème I.

97. Connoissant la distance AB de la batterie au parapet R , la hauteur BC du point C où le projectile doit passer au dessus de la crête du parapet ; la hauteur DH du terre-plein du rempart sur lequel il doit tomber ; & prenant pour AP une quantité arbitraire moindre que AB & plus grande que la moitié de cette distance. Trouver l'angle & la force de projection , la position du point de chute H , & l'angle de chute du boulet.

Puisque l'on connoît les quantités b, c, f & x , on connoitra $y = \frac{c x x}{2 b x - b b}$; on aura donc la tangente de l'angle de projection par l'équation $t = \frac{2 y}{x}$. L'équation $y = \frac{f x x}{2 d x - d d}$ donne $d = x + x \sqrt{\frac{y f}{y}}$, ou la distance AD , & par conséquent la position du point H . Connoissant d & x , on trouvera la tangente T de l'angle de chute en H , par la proportion $t : T :: x : d - x$, qui

donne $T = \frac{t(d-x)}{x}$. Enfin mettant les valeurs de t , b & c dans l'équation $a = \frac{bb(1+tt)}{4(tb-c)}$ (§. 33.), on aura la force de projection représentée par a , d'où l'on tirera la vitesse du projectile en multipliant par 60, & extrayant la racine quarrée du produit.

Exemple. Supposons la distance AB de 150 toises ou 900 pieds ; le point C de 27 pieds plus élevé que le niveau de la batterie ; & le point H de 21 pieds au dessus du même niveau. Si l'on veut que AP soit les deux tiers de AB, on aura $x = 600$, donc $y = 36$; ce qui donne $\log. t = l. \frac{2y}{x} = 9,0791812$, qui répond à $6^{\circ} 51'$ pour l'angle de projection. Les valeurs de $x = 600$; $y = 36$ & $f = 21$ étant mises dans l'équation $d = x + x\sqrt{\frac{y-f}{y}}$, on trouve $d = 987,29$; d'où l'on tire BD ou $RH = d - b = 87,29$ pieds : le boulet tombera donc à 14 to. 3 pi. du parapet sous un angle dont $l. \text{tang.} = l. \frac{t(d-x)}{x} = 8,8890756$, qui répond à $4^{\circ} 25'$; angle d'incidence très-propre à faciliter le ricochet. Enfin mettons dans l'équation $a = \frac{bb(1+tt)}{4(tb-c)}$ les valeurs de $b = 900$; $c = 27$ & $t = 0,12$, nous trouverons $a = 2536$ pieds, & une vitesse de 390 pieds par seconde.



Problème II.

98, Connoissant la distance AB, les hauteurs BC, DH, & la position du point H: trouver la distance AP du canon à l'axe de la parabole; les angles de projection & de chute; & la vitesse du boulet.

On connoît ici les quantités b , c , d & f , on aura donc $AP = x$ par l'équation $x = \frac{c d d - b b f}{2(c d - b f)}$, & y par l'équation $y = \frac{c x x}{2 b x - b b}$, x & y étant connues, on trouvera l'angle de projection QAP par sa tangente $t = \frac{2y}{x}$, & l'angle de chute en H par sa tangente $T = \frac{t(d-x)}{x}$, La vitesse du mobile se trouve, comme ci-dessus, par l'équation $a = \frac{b b (1 + t t)}{4(t b - c)}$; & elle est exprimée par $\sqrt{60 a}$.

Exemple. La batterie étant à la même distance de 900 pieds, si l'on se propose de faire passer le boulet par le point C élevé de 27 pieds au dessus du niveau de la batterie, de manière qu'il aille tomber en un point H éloigné du parapet de 12 toises ou 72 pieds; la hauteur DH étant de 21 pieds; on aura $b = 900$, $c = 27$, $d = 972$ & $f = 21$, donc $x = \frac{c d d - b b f}{2(c d - b f)} = 578,647$ pieds, & $y = \frac{c x x}{2 b x - b b} = 39,04$. Ces valeurs donneront l'angle de projection par sa tangente $t = \frac{2y}{x}$, dont le logarithme 9,1301353 indique un angle de $7^{\circ} 41'$. L'angle de chute se trouve par sa tangente $T = \frac{t(d-x)}{x}$ dont le logarithme répond à $5^{\circ} 14'$. Enfin l'on trouve

par l'équation $a = \frac{bb(1+tt)}{4(c b - c)}$, & par l'expression $\sqrt{60 a}$, que la vitesse du projectile doit être de 362 pieds par seconde.

Problème III.

99. Connoissant toujours les distances horizontale AB & verticale BC du point C où le boulet doit passer pour franchir le parapet, avec l'angle qu'il doit faire à sa chute au point H, dont l'élévation DH est aussi donnée: trouver l'angle de projection & la vitesse du boulet.

Les quantités b, c, f & T étant connues, on pourra trouver la valeur de d par la proportion $1 : T :: b d d - b b d : c d d + b b f - 2 b d f$, qui donne l'équation $(T b - c) d d - (T b b - 2 b f) d = b b f$; divisant par $T b - c$, on aura $d d - \frac{(T b b - 2 b f) d}{T b - c} = \frac{b b f}{T b - c}$; d'où l'on tire $d = \frac{T b b - 2 b f}{2(T b - c)} + \sqrt{\left(\frac{(T b b - 2 b f)^2}{4(T b - c)^2} + \frac{b b f}{T b - c}\right)}$
 $= \frac{b [T b - 2 f + \sqrt{(T^2 b^2 - 4 f (c - f))}]}{2(T b - c)}$. Cette valeur

de d étant mise dans l'équation $x = \frac{c d d - b b f}{2 c d - 2 b f}$, on aura celle de x , & l'on trouvera les valeurs de y, t & a comme dans les problèmes précédens.

Exemple. On demande de faire passer un boulet par un point C, élevé de 60 pieds au dessus du niveau de la batterie, de maniere qu'en tombant sur le terre-plein d'un rempart élevé de 54 pieds, l'angle de chute soit de 5 degrés; la distance de la batterie au parapet étant de 200 toises ou 1200 pieds. On a ici $b = 1200$; $c = 60$; $f = 54$ & $l. T = 8,9419518$: donc $T b = 104599$;

$T^2 b^2 = 11022$; $4 f (c - f) = 1296$; $T b - 2 f = -3,01$, & $T b - c = 44,99$. Ce qui donne $d = \frac{1200 (-3,01 + \sqrt{9726})}{89,98} = 1275,08$; c'est-à-dire que le boulet tombera à 75 pieds ou $12 \frac{1}{2}$ toises du parapet, où sa direction fera un angle de 5 degrés avec l'horizon. Mettant cette valeur de d , & celles de b , c , f dans l'équation $x = \frac{c d d - b b f}{2 c d - 2 b f}$, on trouvera que l'axe de la parabole est éloigné du canon d'environ 141 toises. Enfin l'équation $t = \frac{T x}{d - x}$ donne $\log. t = 9,2358251$, & fait voir que l'angle de projection doit être de $9^\circ 46'$; d'où l'on conclura, en employant l'équation $a = \frac{b b (1 + t t)}{4 (t b - c)}$, que la vitesse du boulet doit être d'environ 390 pieds par seconde.

Problème IV.

100. Connoissant la vitesse du boulet ; la hauteur du parapet qu'il doit franchir ; celle du terre-plein du rempart où il doit tomber , & l'angle que sa direction doit faire en y tombant : trouver l'angle de projection , & à quelle distance il faut placer la batterie.

Nommant a la hauteur due à la vitesse avec laquelle le boulet part du point A pour décrire la parabole AMCH ; $a - f$ fera la hauteur due à la vitesse avec laquelle il parcourroit la parabole HCMA dans le sens contraire en partant du point H , & comme le point A est plus bas que le point H , on auroit dans ce dernier cas l'équation $a - f = \frac{d d (1 + T T)}{4 (T d + f)}$, qui donne $d =$

$$\frac{2T(a-f)}{1+TT} + \sqrt{\left(\frac{4TT(a-f)^2}{(1+TT)^2} + \frac{4f(a-f)}{1+TT}\right)}$$

pour la distance AD. Prolongeant l'horizontale HR, jusqu'à la parabole en N, on aura la double ordonnée HN, dont on trouvera la valeur par l'équation $a-f = \frac{HN(1+TT)}{4T}$. (par le troisième cas du §. 33), en sup-

posant toujours que le mobile part du point H sous un angle dont la tangente = T. La moitié de cette double ordonnée donnera PD = d - x, & par conséquent AP = x. Connoissant RC = c - f, on trouvera

$$HR = d - b \text{ par l'équation } a-f = \frac{(d-b)^2(1+TT)}{4(T(d-b)-(c-f))},$$

$$\text{qui donne } d-b = \frac{2T(a-f)}{1+TT} - \sqrt{\left(\frac{4TT(a-f)^2}{(1+TT)^2} - \frac{4(c-f)(a-f)}{1+TT}\right)}, \text{ d'où il est facile d'avoir la valeur}$$

de b, ou de la distance de la batterie au parapet R. Enfin,

$$\text{l'équation } t = \frac{Tx}{d-x} \text{ donnera l'angle de projection.}$$

Supposons, par exemple, que le projectile doit partir du point A, avec une vitesse de 400 pieds par seconde, pour passer au dessus du parapet R par un point C élevé de 60 pieds, & tomber en H sur un rempart élevé de 54 pieds sous un angle d'incidence de 5 degrés: on a donc $a = 2666 \frac{2}{3}$; $a-f = 2612 \frac{2}{3}$; $c = 60$, $f = 54$; $c-f = 6$; $l.T = 8,9419518$ & $l.(1+TT) = 0,0033116$. Ces valeurs étant mises dans les équations de cette solution, on trouvera $d = AD = 1328,82$; $HR = 907,37$, dont la moitié 453,68 donne PD; donc $AP = AD - PD = 875,14$; $d-b = 74,73$, ou environ $12 \frac{1}{2}$ toises pour la distance du parapet au point de chute H; $b = 1254,09$ ou 209 toises, distance à

laquelle il faut placer la batterie. Enfin l'équation $t = \frac{Tx}{d-x}$ donne $l.t = 9,2272751$ & fait voir que l'angle de projection doit être de $9^{\circ}. 35'$.

101. Nous ne parlerons point des autres problèmes que l'on peut proposer sur le tir à ricochet, ce que nous venons de dire est plus que suffisant pour donner une idée de la manière de les résoudre. Nous ajouterons seulement qu'une des conditions de ce tir étant que le boulet s'élève peu dans ses divers ricochets, cette condition sera pleinement remplie, si, en rasant la crête du parapet, le boulet va tomber sur la branche de l'ouvrage dont on veut ruiner les défenses, vers le milieu de sa longueur, c'est-à-dire si la distance du parapet au premier point de chute H est de 25 à 30 toises : car il est clair que, de cette manière, le boulet, avec une plus forte impulsion, se trouvera dans toute sa course au dessus de cet ouvrage à une hauteur moindre que RC, & pourra rencontrer tous les objets qui ont moins de 6 pieds d'élévation. L'angle & la force de projection propres à produire cet effet, se déterminent par le problème II.

102. Ce seroit ici le lieu d'examiner l'effet du ricochet relativement à l'angle de réflexion comparé avec l'angle de chute ou d'incidence, & de chercher à connoître le degré de vitesse qui reste au boulet après chaque ricochet : mais outre qu'il n'en résulteroit aucun avantage pour la pratique, que nous avons principalement en vue dans cet ouvrage, un pareil examen ne peut être fondé que sur des hypothèses souvent gratuites, & toujours très-incertaines. Le mobile est-il dur ou élastique, & quel est son degré d'élasticité ? La surface réfléchissante est-elle

flexible, élastique, & à quel degré? Le terrain est-il homogène, compacte, quelle est sa ténacité & la cohésion de ses parties? &c. &c. Toutes ces circonstances sont, comme on voit, susceptibles d'une infinité de combinaisons, qui peuvent faire varier à l'infini l'angle & la vitesse de réflexion. S'il est difficile de rencontrer juste en ne voulant considérer qu'un seul cas; il n'est pas moins inutile de les examiner tous. Contentons-nous donc d'observer que, pour faciliter le ricochet, il faut que l'angle d'incidence du boulet soit très-aigu, & ne passe point 8 à 10 degrés; que cet angle est d'autant plus aigu, quelque soit d'ailleurs l'angle de projection, que le point de chute est plus près du point culminant, ou sommet de la courbe décrite par le boulet; & qu'en général la différence entre l'angle de projection & l'angle de chute, augmente à mesure que le point de chute est plus élevé au dessus du niveau de la batterie: de sorte que, quand on est dans le cas de choisir la position de l'axe de la parabole, comme dans le problème I, il faut le rapprocher d'autant plus du parapet que le boulet doit franchir, que ce parapet est plus élevé.

L'ordre des matieres que nous nous étions proposé de suivre au §. 49, exigeroit que l'on fit ici mention du tir du fusil: mais comme on ne pourroit que répéter en grande partie ce qui a été dit sur le tir du canon, nous remettrons à la section suivante à traiter plus particulièrement ce qui concerne cette troisième arme.

103. La résistance de l'air dans lequel les projectiles se meuvent, est un obstacle que nous n'avons point considéré jusqu'à présent, & qui produit des changemens considérables aux résultats de la théorie que nous venons d'ex-

poser. Un corps qui se meut dans l'air, quand même la pesanteur n'agiroit point sur lui, ne parcourroit point d'un mouvement uniforme la ligne droite suivant laquelle il est projeté; parce que l'air lui oppose une résistance qui détruit à chaque instant une partie de sa vitesse. Et par la même raison le mouvement uniformément accéléré, qui résulte de la pesanteur, reçoit aussi quelques altérations. Donc 1°. la courbe de projection n'est point une parabole; cette courbe ne pouvant être décrite qu'en vertu du mouvement uniforme d'une part, combiné de l'autre avec le mouvement uniformément accéléré. 2°. L'angle & la force de projection étant donnés, l'amplitude ou portée horizontale est toujours moindre que celle qui résulte des équations trouvées ci-dessus. 3°. Le point le plus élevé de la courbe décrite par le projectile, ne répond point au milieu de l'amplitude horizontale : il est plus près du point de chute que du point de projection. 4°. L'angle de chute, à l'extrémité de la portée horizontale, est plus grand que l'angle de projection. 5°. L'angle qui donne la plus grande amplitude, est moindre que l'angle de 45 degrés, & en diffère d'autant plus, que le projectile est lancé avec une plus grande vitesse. 6°. Les deux angles sous lesquels un mobile peut atteindre le même but situé au niveau de la batterie, ne sont point complémens l'un de l'autre; le plus grand diffère moins de 45 degrés que le plus petit. 7°. Enfin, & en général les différences dont nous venons de parler, & qui sont occasionnées par la résistance de l'air, deviennent d'autant plus considérables, que le projectile a plus de vitesse, & que sa surface est plus grande eu égard à sa masse. C'est ce que nous allons examiner dans la section suivante.

SECTION II.

Du mouvement des projectiles dans l'air.

104. **U**N corps qui se meut dans un fluide , y éprouve une résistance qui tend à ralentir son mouvement. Cette résistance vient principalement de ce que tout corps en mouvement ne peut en rencontrer un autre , sans que sa vitesse soit diminuée ou totalement détruite. C'est une suite de ce principe de mécanique , qu'il n'y a point d'action sans une réaction égale & directement opposée ; & de cette propriété qu'ont les corps de résister , à raison de leur masse , à tout changement d'état. Or un corps qui se meut dans l'air , ou dans tout autre fluide , rencontre continuellement de nouvelles particules , qu'il est obligé de déplacer pour traverser le fluide. Ces particules , par leur inertie , qui est commune à toutes les parties de la matière , résistent à leur déplacement , & ne prennent de mouvement qu'en ralentissant celui du mobile , & en lui faisant perdre à chaque instant une partie de sa vitesse. Tel est en général l'effet de la résistance que les fluides opposent aux corps qui s'y meuvent. Mais quelle est cette partie de la vitesse que le mobile perd à chaque instant ? A-t-elle un rapport constant avec sa vitesse actuelle ? Quel est ce rapport ? Ce seroit peu connoître la nature des fluides , ou plutôt ce seroit prétendre en avoir une connoissance qu'il est impossible d'acquérir , que de vouloir répondre à ces questions par une règle générale. En effet , plusieurs circonstances tant de la part du corps en mouvement , que de celle du fluide dans lequel il se

meut, concourent à varier les effets de cette résistance : de la part du mobile, c'est sur-tout son degré de vitesse, la configuration de sa partie antérieure & sa pesanteur spécifique. De la part du fluide, c'est sa densité, son élasticité; sa ténacité ou cohérence mutuelle de ses parties; & leur frottement contre la surface du mobile & entre elles.

105. A ne considérer toutes ces causes que dans la plus grande généralité des effets qu'elles peuvent produire, les premières notions de la Physique suffisent pour se convaincre que, toutes choses égales d'ailleurs, 1°. la résistance d'un fluide augmente avec la vitesse du mobile. 2°. La résistance contre un plan perpendiculaire à la direction du mouvement, est plus grande que si ce plan se présentait obliquement à la même direction. 3°. La résistance d'un fluide est d'autant plus grande, qu'il a plus de densité relativement à celle du mobile. 4°. La ténacité du fluide, ou cohérence mutuelle de ses particules, & leur frottement contre la surface du mobile & entre elles, contribuent aussi à augmenter la résistance, à cause de la difficulté que le mobile éprouve à séparer les parties du fluide pour s'y faire un passage: difficulté qu'il ne peut vaincre qu'aux dépens d'une partie de sa vitesse. Mais ces deux dernières causes n'ont un effet sensible que dans les fluides gélatineux, & l'on peut sans erreur n'y avoir aucun égard; sur-tout quand il s'agit d'un mouvement rapide & d'un fluide très-délié, tel que celui qui compose notre atmosphère, & que nous avons ici principalement en vue.

106. Pour être en état d'apprécier les règles que la théorie prescrit dans la détermination des effets que nous

venons d'énoncer , il est à propos de donner une attention particulière à ce qui se passe dans un fluide , à la rencontre de ses particules par un corps solide qui s'y meut : on voit d'abord que si ce corps est terminé antérieurement par un plan perpendiculaire à la direction du mouvement ; chaque particule rencontrée par le mobile est nécessairement poussée en avant , & seroit entraînée suivant cette même direction , s'il ne se présentait pas successivement d'autres particules qui obligent les premières à se détourner , à se porter dans tous les sens vers les bords du plan , & de là refluer vers la partie postérieure du mobile. Il arrive même que la plupart de ces particules , avant que le mobile ait pu les atteindre & les choquer immédiatement , sont forcées de se déplacer , & ne participent à l'impulsion du plan choquant que par le moyen d'autres molécules intermédiaires qui en modifient les effets. De là naît une variété & une complication de mouvemens que l'esprit entrevoit , mais que le calcul ne peut ni saisir ni assujettir à ses loix.

107. Si le mobile est terminé en avant par un plan oblique à la direction du mouvement , il semble au premier coup d'œil qu'il devoit avoir moins de peine à surmonter les obstacles qu'il rencontre sur son chemin ; que les particules du fluide céderont plus facilement à son impulsion ; se gêneront moins dans les divers mouvemens qu'elles seront obligées de prendre ; gagneront avec plus de facilité les bords du plan choquant pour se porter en arrière du mobile , & que , s'accumulant moins en avant , elles feront moins d'effort pour en retarder le mouvement , & d'autant moins que l'obliquité du plan seroit plus grande. Mais il se présente ici une circonstance plus propre à aug-

menter la résistance qu'à la diminuer : c'est que la facilité que les particules du fluide ont à s'échapper d'un côté du plan oblique, est compensée par la difficulté qu'elles trouvent à refluer de l'autre. Il est clair en effet que si le plan AB (fig. 29.) se meut suivant la direction CD, les particules du fluide qu'il rencontre étant déterminées à s'écarter en tous sens de la direction CD, tandis que les particules qui sont portées du côté de B s'échappent plus facilement, celles qui vont du côté de A sont beaucoup plus gênées dans leurs mouvemens, elles y sont comme refoulées, s'y accumulent davantage, & opposent en cet endroit une résistance plus grande que si le plan AB étoit perpendiculaire à la direction CD du mouvement; résistance qui doit augmenter avec l'inclinaison du plan. On voit donc qu'il s'en faut de beaucoup que la résistance du fluide contre le mouvement d'un plan oblique soit égale & uniforme sur toute l'étendue de ce plan : elle est plus grande dans l'angle aigu que le plan forme avec la direction du mouvement, que dans l'angle obtus, avec une différence qui dépend de la vitesse du plan, de sa grandeur, de son inclinaison & de la nature du fluide.

108. Lorsque la surface antérieure du mobile est courbe, il est clair que l'effort de la résistance du fluide s'exerce contre une infinité de plans diversement inclinés : on peut donc appliquer à chacun d'eux ce que l'on vient de dire dans l'article précédent. Mais on voit en même tems que les particules du fluide rencontrées par un quelconque de ces petits plans, doivent être moins gênées par les particules exposées au choc des plans circonvoisins; parce que celles-ci, à raison d'une obliquité différente, s'échappent plus facilement à l'impulsion du fluide; d'où il résulte

sur la totalité de la surface courbe une résistance moindre que si elle étoit plane. De là doivent naître aussi tous les effets mentionnés ci-dessus, combinés à l'infini & modifiés selon les différentes inclinaisons des petits plans qui composent la surface courbe du mobile. Ces modifications, quoiqu'indispensables à connoître, n'étant point d'une nature à pouvoir être suffisamment appréciées & soumises au calcul, on ne peut avoir sur la résistance des fluides que des théories imparfaites. L'expérience le prouve, & il est facile d'en rendre raison en appliquant aux loix prescrites par la théorie ordinaire, les différentes remarques que nous venons de faire.

109. La première de ces loix est que, toutes choses d'ailleurs égales, *la résistance d'un fluide contre des plans de différentes grandeurs perpendiculaires à la direction du mouvement, est proportionnelle à l'étendue de ces plans.* Ce principe fondé uniquement sur ce que la résistance est proportionnelle au nombre des particules frappées en même tems, est évidemment faux : car, outre le nombre des particules, il est clair que la difficulté qu'elles trouvent à se détourner & se porter vers les bords du plan, doit augmenter avec l'étendue de ce plan, & rendre la résistance plus grande que ne le comporte le rapport de la grandeur des plans. Pour que ce rapport pût avoir lieu, il faudroit que les particules du fluide, à mesure qu'elles sont frappées par le plan choquant, fussent tout-à-coup anéanties, ou subitement jetées hors de l'étendue du plan, afin qu'elles ne pussent ni empêcher ni modifier l'effet de l'impulsion de ce plan sur les particules suivantes & la réaction de celles-ci. Une pareille hypothèse n'étant point admissible, la résistance d'un fluide contre des plans de différentes

grandeurs ne peut être proportionnelle à l'étendue de ces plans ; elle augmente nécessairement dans un plus grand rapport que les plans , & il est à observer que cette augmentation dépend de la vitesse du plan choquant , & de la nature du fluide ; qu'elle est moindre dans un fluide rare & élastique , & qu'elle diminue avec la vitesse du plan.

110. La seconde loi de la résistance des fluides est que, *contre des plans différemment inclinés, la résistance est proportionnelle au carré des sinus des angles d'inclinaison.* Cette loi suppose, comme la première, que la résistance est égale & uniforme sur toute l'étendue du plan choquant, & ne dépend que du nombre des particules qu'il rencontre dans le même tems : or nous avons vu aux §§. 104 & 105, que les choses ne se passent point ainsi dans le choc soit direct soit oblique : ce choc excite dans le fluide une infinité de mouvemens qui se gênent mutuellement, s'altèrent, se modifient & rendent par conséquent la loi de résistance contre les plans obliques beaucoup plus compliquée que n'est la raison doublée des sinus des angles d'inclinaison. Suivant ce rapport, la résistance des fluides devrait diminuer avec l'angle d'inclinaison ; l'expérience fait voir le contraire, & il est facile de le conclure de ce qui a été dit au §. 105.

111. La résistance d'un fluide contre une surface courbe se calcule ordinairement d'après les propriétés de la courbe indiquées par son équation, & sur le principe d'une résistance proportionnelle au carré des sinus des angles d'inclinaison. Le moindre défaut de cette méthode est de donner la même résistance pour une surface concave que pour une surface convexe de même courbure ; ce qui est contre toute vraisemblance. Mais il seroit facile d'éviter

ce défaut, en n'appliquant la méthode qu'à des surfaces convexes, si elle n'étoit d'ailleurs fondée sur un principe erroné, celui de la résistance en raison doublée des sinus des angles d'inclinaison, dont nous venons de faire voir la fausseté.

112. Une autre loi de la résistance des fluides ; celle qu'il nous importe le plus de bien connoître ; concerne le rapport des résistances du même fluide contre le même mobile qui s'y meut avec différens degrés de vitesse : ce rapport est, dit-on, celui des quarrés des vitesses : c'est-à-dire qu'à une vitesse double, triple, quadruple, &c. le fluide oppose une résistance quatre fois, neuf fois, seize fois plus grande. Voici la raison qu'on en donne : la résistance est proportionnelle au nombre des particules déplacées dans le même tems, & ce nombre est comme l'espace parcouru pendant ce tems, c'est-à-dire comme la vitesse. De plus, elle est proportionnelle à la force avec laquelle chaque particule est frappée ; & cette force est aussi comme la vitesse du mobile ; donc la résistance est en raison doublée, ou comme le quarré de la vitesse. Quoique dans ce raisonnement on fasse abstraction des principales circonstances énoncées au §. 103, il est cependant à présumer que, s'agissant ici du même mobile, de la même surface choquante, du même fluide, & n'y ayant de différence que dans la vitesse, il est, dis-je, à présumer que cette loi s'écarte moins de la vérité que les précédentes. Si elle peche en quelque point, c'est qu'en l'employant pour comparer les effets de la résistance contre des vitesses trop différentes entre elles, contre la vitesse d'un mouvement très-lent, & celle d'un mouvement très-rapide, on trouveroit pour le mouvement rapide une

résistance trop foible, si on la déduisoit par cette regle de la résistance que le fluide oppose à un mouvement lent. Au reste, tout cela dépend de la nature du fluide : s'il est élastique, le principe en question donnera des résultats d'autant plus approchans de la vérité, que l'élasticité sera plus grande : car c'est en vertu du degré d'élasticité dont le fluide est doué, que ses particules se remettent plus ou moins promptement dans l'équilibre rompu par le choc, & qu'elles refluent plus ou moins facilement en arriere du mobile. Il est vrai que cette même propriété rendant le fluide compressible, il peut arriver que le mouvement soit assez rapide, la vitesse du mobile assez grande, pour accumuler les particules du fluide sur sa partie antérieure, avant qu'elles puissent se détourner, augmenter ainsi la densité du fluide & par conséquent sa résistance. La vitesse du mouvement peut même être telle que le fluide ne puisse point remplir dans le même instant l'espace que le mobile vient d'abandonner : il est clair qu'alors, si le fluide est de l'air, outre l'augmentation de résistance occasionnée par une plus grande densité, le corps aura encore toute la pression de l'atmosphère à soutenir. La moindre vitesse nécessaire à cet effet est due à une hauteur de 850 fois 32 pieds, ou est de 1282 pieds par seconde, en supposant la pression de l'atmosphère équivalente au poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur, & l'eau 850 fois plus dense que l'air. Cette vitesse de 1282 pieds par seconde est celle avec laquelle l'air, en vertu de son élasticité, ou de la pression de l'atmosphère, pénètre dans un espace vuide ; ainsi dès que la vitesse du mobile excède 1282 pieds par seconde, la pression de l'atmosphère concourt avec la résistance

pour ralentir son mouvement ; & l'on voit sans peine que dans le cas d'une vitesse moindre , le mobile n'a plus qu'une partie de cette pression à surmonter : cette quantité , qui doit s'estimer sur la différence entre la densité du fluide en avant & en arrière du mobile , disparoit enfin lorsque la densité du fluide est uniforme autour du corps ; ce qui ne peut avoir lieu que dans le cas d'un mouvement lent , ou lorsque l'élasticité du fluide est assez grande pour que l'équilibre rompu par le choc soit aussi-tôt rétabli entre les particules du fluide. C'est dans ce dernier cas seulement que l'on peut strictement admettre la loi de la résistance proportionnelle aux quarrés des vitesses. En tout autre la densité du fluide en avant du mobile variant avec la vitesse , c'est comme si le corps traversoit successivement des milieux différemment denses , dont la densité diminuerait par gradation à mesure que le mouvement se ralentit : or il est clair que cette supposition exclut celle d'une densité uniforme , sur laquelle est fondée la règle d'une résistance proportionnelle aux quarrés des vitesses , &c. Nous ne nous arrêterons pas davantage sur cette matière , dont un examen plus approfondi ne feroit découvrir que de nouvelles difficultés. Contentons-nous d'observer que pour établir sur la résistance des fluides une théorie complete & satisfaisante , il est indispensable de mettre en considération toutes les circonstances énoncées dans les articles précédens , seul moyen d'obtenir une loi générale d'où l'on puisse déduire tous les cas particuliers ; & une formule de résistance applicable à tous les degrés de vitesse du mobile , à tous les degrés de densité & d'élasticité du fluide. Si à cette propriété la formule joint celle d'un calcul peu compliqué & d'une facile application à la pratique , la théo-

rie aura toute la perfection que l'on peut desirer. En attendant qu'une main habile remplisse notre attente à cet égard, nous nous en tiendrons à la théorie de Newton : suffisante dans bien des circonstances, il ne sera peut-être pas impossible, avec certaines modifications, de l'adapter au mouvement rapide des projectiles lancés par les bouches à feu. Nous allons l'exposer le plus brièvement que faire se pourra.

Théorie de la résistance des fluides.

113. Si un cylindre se meut uniformément suivant la direction de son axe dans un fluide de même densité que la sienne, & dont les particules ne puissent être poussées qu'en avant dans la même direction, de manière qu'en tems égaux il déplace des quantités égales du fluide, & leur communique le degré de vitesse dont il est actuellement animé; il est évident qu'après avoir parcouru un espace égal à la longueur de son axe, ce cylindre aura déplacé une masse de fluide égale à la sienne; il lui aura communiqué successivement toute sa vitesse, & aura par conséquent perdu tout son mouvement. Donc la résistance du fluide est, dans ce cas, équivalente à une force capable de détruire le mouvement du cylindre, ou de le produire, dans le tems qu'il parcourroit uniformément la longueur de son axe. L'effet de cette résistance est le même que celui d'une force qui, agissant contre le cylindre dans une direction contraire à celle de son mouvement, détruiroit en tems égaux des parties égales de sa vitesse; c'est une force analogue à la gravité agissant contre un corps lancé verticalement de bas en haut.

114. Ce cas auroit lieu pour un fluide renfermé dans

un canal, où les particules poussées par le cylindre en mouvement, ne pourroient s'écarter d'aucun côté de sa direction. Mais si le fluide est indéfiniment étendu ou libre de tous côtés, les particules poussées par le cylindre se mouvront en tous sens, & n'opposeront plus qu'une résistance moitié de la précédente; c'est-à-dire qu'alors la résistance est égale à une force capable d'engendrer, ou de détruire le mouvement du cylindre dans le tems qu'il parcourroit uniformément deux fois la longueur de son axe.

115. Pour se convaincre de la vérité de ce principe, imaginons une demi-sphère formée par la révolution du quart de cercle CAB (fig. 30.) autour du rayon CB, que nous supposerons être la direction & la vitesse du cylindre. Soit CM la direction & la vitesse d'une particule du fluide au premier instant de son mouvement: cette vitesse pourra se décomposer en deux autres CP & PM, l'une perpendiculaire & l'autre parallèle au mouvement du cylindre; la première ne s'opposant point à ce mouvement, la résistance de la particule dirigée suivant CM ne sera exprimée que par PM. Donc la résistance du fluide, lorsque ses particules sont toutes poussées en avant suivant la direction du cylindre, est à sa résistance lorsque les particules ont la liberté de se mouvoir en tous sens, comme la somme des rayons menés à tous les points de la surface de la demi-sphère, est à la somme des sinus correspondans aux mêmes points. Si l'on nomme donc le rayon CB, a ; & CP, x ; que l'on mène pm infiniment proche de PM, on aura $Pp = dx$; l'arc $Mm = \frac{a dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$; la zone sphérique décrite

par $Mm = \frac{max dx}{\sqrt{(aa-xx)}}$, (m exprimant le rapport de la circonférence au rayon) & $\frac{max dx}{\sqrt{(aa-xx)}} \times \sqrt{(aa-xx)}$ ou $max dx$ sera la somme des sinus qui répondent à tous les points de cette zone. L'intégrale $\frac{1}{2} max x$ de cette différentielle exprimera donc la somme des sinus qui répondent à tous les points de la portion de surface sphérique décrite par l'arc BM. Enfin, mettant a au lieu de x , on aura $\frac{1}{2} ma^3$ pour la somme de tous les PM; or la somme de tous les CM est $= ma^3$, donc ces deux sommes sont entre elles comme 1 : 2; donc ce rapport est aussi celui des deux résistances dont nous venons de parler.

116. Il suit de là que si un cylindre se meut suivant la direction de son axe dans un fluide de même densité, & avec la vitesse qu'il auroit acquise en tombant dans le vuide d'une hauteur égale à sa longueur, il rencontre une résistance équivalente à son poids: car cette résistance est égale à la force qui produiroit le mouvement du cylindre dans le tems qu'il parcourroit uniformément deux fois sa longueur; ou qu'il tomberoit librement d'une hauteur égale à sa longueur, & c'est là précisément l'effet de la gravité naturelle des corps.

117. Si la densité du fluide est plus grande ou moindre que celle du cylindre, il est clair que la résistance augmentera ou diminuera dans le rapport de cette densité: c'est-à-dire que la résistance du fluide est à la force capable d'engendrer ou de détruire le mouvement du cylindre, dans le tems qu'il parcourt deux fois sa longueur, comme la densité du fluide est à celle du cylindre.

118. D'où il suit enfin que la résistance qu'un cylin-

dre éprouve dans un fluide , est égale au poids d'une colonne de ce fluide de même base que le cylindre , & d'une hauteur égale à celle d'où un corps devroit tomber dans le vuide pour acquérir la vitesse du cylindre.

119. Ce que l'on vient de dire du cylindre s'appliquera facilement à une sphere de même diametre , lorsqu'on connoitra le rapport des résistances que le même fluide oppose à ces deux corps. Pour trouver ce rapport, soit une demi-sphere formée par la révolution du quart de cercle ACB (fig. 31.) autour du rayon AC , que nous supposons être la direction du mouvement de la sphere. D'un point quelconque M de l'arc AB , menons MP perpendiculaire sur BC , & prenons sur son prolongement une partie MD pour représenter la force d'impulsion de la sphere contre les parties du fluide , ou, ce qui revient au même, en supposant la sphere en repos & le fluide en mouvement suivant la direction DM , la force d'impulsion du fluide contre la sphere ; menant au point M la tangente ME , & du point D la perpendiculaire DE sur cette tangente, il est évident que la force absolue du fluide, celle avec laquelle il choqueroit directement la base du cylindre au point P , est à son action contre la surface de la sphere au point M , comme DM est à DE ; parce que la force exprimée par ME n'affecte point la sphere. Mais la force DE étant oblique à la direction de la sphere ou du fluide, on la décomposera encore, en menant EF perpendiculaire sur DM , en deux autres DF , FE , dont la première seule pousse suivant la direction du fluide, ou contribue à retarder le mouvement de la sphere. Il est vrai que l'autre force EF tend à détourner la sphere de sa direction ; mais elle est détruite par une force égale & di-

rectement opposée, que l'on trouveroit de même pour un point N pris de l'autre côté & à distance égale du rayon CA. Donc la force que le fluide exerce contre un point P de la base du cylindre, est à celle qu'il exerce contre le point correspondant M de la surface de la sphere, comme DM est à DF, ou comme $\overline{DM}$ est à $\overline{DE}$, ou enfin, à cause des triangles semblables DME, MCP, comme $\overline{CM}$ est à $\overline{PM}$; de sorte que la résistance que rencontre le cylindre, est à celle que rencontre la sphere dans le même fluide, comme la somme de tous les $\overline{CM}$ est à la somme de tous les $\overline{PM}$. Nommant donc AC, a ; CP, x ; la partie infiniment petite Pp, dx ; la couronne décrite par Pp sera $= mx dx$, & les $\overline{PM}$ répondans à cette couronne seront $= mx dx (aa - xx) = ma^2 x dx - mx^3 dx$, dont l'intégrale $= \frac{1}{2} ma^2 x^2 - \frac{1}{4} mx^4$, qui devient, lorsque $x=a$, $\frac{1}{4} ma^4$. Or le même nombre de $\overline{CM}$ est $= \frac{1}{2} ma^4$; donc la résistance de la sphere est à la résistance du cylindre, comme $\frac{1}{4}$ est à $\frac{1}{2}$, ou comme 1 : 2.

120. On peut donc conclure que, 1°. la résistance qu'un fluide oppose au mouvement d'un globe, est moitié de celle qu'y rencontre un cylindre de même diametre & de même densité que ce globe.

121. 2°. La force de la résistance qu'un globe éprouve de la part d'un fluide dans lequel il se meut, est égale au poids d'une colonne de ce fluide, de même diametre que le globe, & dont la hauteur est moitié de celle d'où un corps devoit tomber dans le vuide pour acquérir la vitesse du globe.

122. 3°. Cette même résistance est à la force capable d'engendrer ou de détruire le mouvement du globe, dans

le tems qu'il parcourroit uniformément huit fois le tiers de son diametre, comme la densité du globe est à celle du fluide : car s'il étoit question d'un cylindre équilatéral, la moitié de la force qui détruit le mouvement du cylindre dans le tems qu'il parcourt deux fois sa longueur ou son diametre, détruiroit ce même mouvement dans le temps que le cylindre parcourt quatre fois sa longueur; elle détruira donc le mouvement du globe, qui est les $\frac{2}{3}$ du cylindre, dans le tems qu'il parcourroit les $\frac{2}{3}$ de cet espace, ou huit fois le tiers de son diametre:

123. 4°. Les résistances qu'un fluide oppose au même globe mu avec différentes vitesses, sont proportionnelles aux quarrés de ces vitesses; puisqu'elles sont comme les hauteurs d'où ces vitesses ont été acquises.

124 Telle est la théorie que l'on donne communément de la résistance des fluides : elle est déduite de celle de Newton, qui le premier a traité cette matiere dans le plus grand détail au second livre de ses principes. Nous n'en avons donné ici qu'un précis très-succinct, mais suffisant pour l'usage que nous nous proposons d'en faire. Nous ajouterons seulement que, d'après ce qui a été dit aux articles 104 & 105, il n'est pas douteux que, pour les surfaces planes, la théorie que nous venons d'exposer, ne donne une résistance trop foible, & d'autant plus trop foible que la surface est plus grande : car il est évident que la difficulté que les particules du fluide ont à se détourner de la direction du mobile, doit augmenter avec l'étendue du plan choquant; de sorte que la colonne de fluide, qui par son poids exprime la force de la résistance, doit avoir une hauteur plus grande que celle qui est due à la vitesse du mobile. L'expérience confirme pleinement cette aug-

mentation de la résistance à raison de l'étendue des plans : il résulte de celles de M. le Ch^{er}. de Borda (Mém. de l'Acad. année 1763) que la résistance qu'éprouve dans l'air une surface plane de quatre pouces en quarré ayant une vitesse de 25,47 pi. par seconde, équivaut au poids d'une colonne d'air de même base, & dont la hauteur est de 16,1 pieds, au lieu de 10,74 pieds, hauteur due à la vitesse de 25,47 pieds. Lorsque le plan a six pouces en quarré & la même vitesse, la hauteur de la colonne d'air qui exprime la résistance est de 17,1 pieds ; & pour un plan de neuf pouces en quarré ayant la même vitesse, la hauteur de cette colonne est de 19,1 pieds. On est donc fondé à dire que la résistance de l'air contre des surfaces planes augmente suivant un rapport plus grand que celui de l'étendue de ces surfaces, puisque les résistances contre les trois plans ci-dessus ne sont pas simplement comme les nombres 16 : 36 : 81, qui expriment leurs surfaces ; mais comme $16 \times 16,1 : 36 \times 17,6 : 81 \times 19,1$. Il est même à présumer que si, avec la même surface, ces plans avoient une toute autre figure que la quarrée, ils rencontreroient des résistances différentes, & que ces résistances seroient moindres si les plans étoient circulaires. En effet, il résulte des mêmes expériences, qu'un cercle de $4\frac{1}{2}$ pouces de diamètre, dont la surface diffère très-peu de celle d'un plan de 4 pouces en quarré, n'éprouve, avec une vitesse de 12,9 pieds par seconde, qu'une résistance de 0,03613 liv. tandis que celle du plan quarré ayant la même vitesse est de 0,0383 livres. Il ne peut donc y avoir de règle générale pour évaluer la résistance d'un fluide contre des surfaces planes ; la vitesse, l'étendue, la figure, tout concourt à faire varier cette résistance.

125. A l'égard des surfaces courbes, de la sphérique par exemple, qui est la seule que nous examinerons, parce que c'est la seule qui nous intéresse; il suivroit de la théorie que nous avons exposée ci-dessus, que sa résistance dans l'air étant moitié de celle qu'éprouve le grand cercle de la sphere (§. 113.) seroit équivalente au poids d'une colonne d'air de même base, & d'une hauteur plus grande que la moitié de la hauteur due à sa vitesse; mais il y a ici une compensation qui rapproche l'expérience de la théorie, du moins pour un globe de $4\frac{1}{2}$ pouces de diamètre: en suivant toujours les expériences de M. le Ch^{er}. de Borda, on trouve que la hauteur de la colonne d'air dont le poids exprime la résistance d'un cercle de $4\frac{1}{2}$ po. de diamètre, est à la hauteur due à sa vitesse comme 3,95 est à 2,76; ou comme 1,43 est à 1: mais la résistance de la sphere est à celle du cercle comme 1 est à 2,44; donc la hauteur de la colonne d'air équivalente par son poids à la résistance de la sphere, est à la hauteur due à sa vitesse comme 1,43 est à 2,44, ou comme 0,586 est à 1; ce qui fait un peu plus que la moitié de la hauteur d'où le mobile devoit tomber dans le vuide pour acquérir sa vitesse. Ce rapport a-t-il également lieu pour une sphere d'un autre diamètre, & animée d'une autre vitesse? Les observations que nous avons faites ci-dessus, ne permettent point de le présumer. Mais la loi des résistances en raison des quarrés des vitesses étant celle dont les corps qui se meuvent dans l'air s'écartent le moins; & pouvant raisonnablement conjecturer qu'une sphere, à mesure que son diamètre devient plus grand, rencontre dans l'air une résistance plus petite relativement à celle de son grand cercle; nous croyons ne pas nous éloigner beaucoup de la vérité,

en admettant que la résistance qu'une sphere éprouve dans l'air, est égale au poids d'une colonne d'air qui a pour base le grand cercle de cette sphere, & pour hauteur les $\frac{58}{100}$, ou les $\frac{2}{3}$ de la hauteur due à sa vitesse.

126. Au reste, on pourra supposer, afin de généraliser la théorie, que h étant la hauteur due à la vitesse du globe, nh est la hauteur de la colonne du fluide dont le poids équivaut à la force de résistance; sauf à mettre pour n les valeurs que l'expérience indiquera pour chaque cas particulier.

Application de la théorie précédente.

Nous allons faire usage de la théorie qui vient d'être exposée, pour connoître les effets de la résistance que l'air oppose à un corps sphérique qui s'y meut, soit en ligne droite, ou en ligne courbe, & abstraction faite de sa pesanteur. Ce fera le sujet d'autant de problèmes qu'il y aura de circonstances à examiner.

PROBLÈME I.

127. *Connoissant la vitesse initiale d'un globe, trouver ce que la résistance de l'air lui fait perdre de cette vitesse après qu'il a parcouru un espace donné.*

Soit un globe qui se meut dans l'air le long de la ligne AB droite ou courbe (fig. 32); que sa vitesse en partant du point A soit représentée par V, & qu'arrivé en P, après avoir parcouru $AP = x$, sa vitesse soit $= u$. Supposons que la densité du mobile soit à celle de l'air comme D est à 1, & que le diametre de ce globe soit $= a$; son poids sera égal au poids d'une colonne d'air de

même diamètre & d'une hauteur $= \frac{2}{3} D a$. Mais la résistance que l'air oppose en P au mouvement du globe est équivalente au poids d'une colonne d'air dont le diamètre est aussi égal à celui du globe, & dont la hauteur vaut n fois la hauteur due à la vitesse u , c'est-à-dire $\frac{n u u}{4g}$ (§. 124); g étant la hauteur dans le vuide de la chute d'un corps pendant la première seconde, divisant par le poids $\frac{2}{3} D a$ du mobile, la force de la résistance sur le globe sera $= \frac{3 n u u}{8 g D a}$; & comme cette force tend à diminuer la vitesse du mobile, on aura $\frac{2 u d u}{4 g} = -\frac{3 n u^2 d x}{8 g D a}$, ou $u d u = -\frac{3 n u^2 d x}{4 D a}$, & $\frac{d u}{u} = -\frac{3 n d x}{4 D a}$; dont l'intégrale est $\log u = -\frac{3 n x}{4 D a} + C$. Pour déterminer la constante C, on observera qu'à l'origine du mouvement, lorsque $x = 0$, on a $u = V$; ce qui donne $\log V = C$; donc $\log u = \log V - \frac{3 n x}{4 D a}$. Enfin réduisant les logarithmes hyperboliques, que donne ce calcul, à ceux des tables, & prenant m pour le nombre dont le logarithme commun est $\frac{3 n x}{4 D a} \times 0,43429448$, on aura $\log u = \log V - \log m$ & $u = \frac{V}{m}$ pour la vitesse restante, & par conséquent $V - \frac{V}{m}$ pour la vitesse détruite par la résistance de l'air, pendant que le mobile a parcouru l'espace AP.



PROBLÈME II.

128. Connoissant la vitesse qu'un globe conserve après avoir parcouru un espace donné, trouver la vitesse qu'il avoit au commencement de cet espace.

Cette vitesse initiale se trouve par le moyen de l'équation $u = \frac{V}{m}$, qui donne $V = mu$.

PROBLÈME III.

129. Connoissant la vitesse initiale d'un globe, trouver le tems qu'il met à parcourir un espace donné.

Nommons, comme ci-dessus, V la vitesse initiale du globe; u celle qui lui reste en P ; & t le tems employé à parcourir l'espace $AP = x$, puisque pendant l'instant dt employé à parcourir l'espace infiniment petit $Pp = dx$, le mouvement peut être considéré comme uniforme, on a, par les principes de ce mouvement, $dt = \frac{dx}{u}$; or l'équation $\frac{du}{u} = \frac{-3n dx}{4Da}$, trouvée au problème précédent, donne $dx = \frac{-4Da du}{3nu}$; donc $dt = \frac{-4Da du}{3nu^2}$, dont l'intégrale est $t = \frac{4Da}{3nu} +$ une constante C que l'on déterminera en observant qu'à l'origine du mouvement, où $t = 0$, on a $u = V$, ce qui donne $0 = \frac{4Da}{3nV} + C$, ou $C = -\frac{4Da}{3nV}$; donc $t = \frac{4Da}{3nu} - \frac{4Da}{3nV} = \frac{4Da}{3n} \left(\frac{V-u}{Vu} \right)$; mettant à la place

de u sa valeur $\frac{V}{m}$ trouvée par le premier problème, on aura $t = \frac{4D^a}{3^n} \times \frac{m-1}{V}$.

130. Comme la quantité $\frac{4D^a}{3^n}$ exprime la loi de résistance, & qu'elle entre constamment dans le calcul du mouvement des projectiles, nous la représenterons dans la suite par la lettre c , afin de simplifier les expressions; en sorte que m fera un nombre dont le logarithme est $\frac{x}{c} \times 0,43429448$; & l'on aura le tems $t = \frac{c}{V} (m-1)$.

PROBLÈME IV.

131. Connoissant le tems qu'un globe met à parcourir un espace donné, trouver sa vitesse initiale.

Cette vitesse se déduit de l'équation $t = \frac{c}{V} (m-1)$ que l'on vient de trouver, & qui donne $V = \frac{c}{t} (m-1)$.

PROBLÈME V.

132. Connoissant la vitesse initiale d'un globe, & le tems de son mouvement, trouver l'espace parcouru pendant ce tems.

La même équation $t = \frac{c}{V} (m-1)$ donne $m = \frac{Vt}{c} + 1$: mais l'on a supposé $\frac{x}{c} \times 0,43429448 = \lg m$; donc aussi $\frac{x}{c} \times 0,43429448 = \lg \left(\frac{Vt}{c} + 1 \right)$, d'où l'on tire $x = \frac{c \lg \left(\frac{Vt}{c} + 1 \right)}{0,43429448}$. Ce qui fait voir qu'ayant trouvé

la valeur de m , il faut multiplier son logarithme par c , & diviser le produit par 0,43429448, pour avoir l'espace x .

133. Pour donner quelques exemples du calcul de ces formules, nous allons en faire l'application aux projectiles de l'artillerie : ce sont des corps sphériques dont les diamètres sont connus, ainsi que les poids, & par conséquent les densités. Mais l'on se tromperoit au sujet de la densité des boulets, si on vouloit la déduire de leurs dénominations ; parce que les boulets dits de 24, de 16, &c. pèsent plus qu'il n'est indiqué par ces nombres. Il résulte d'une pesée faite sur une grande quantité de boulets de chaque calibre que leur densité moyenne est à celle de l'eau, comme 7,166 est à 1 ; & à celle de l'air comme 6091,1 est à 1, en supposant l'air 850 fois moins dense que l'eau. Les bombes & obus ont chacun leur densité particulière relativement à leurs diamètres, & à leurs poids moyens, y compris celui de la poudre dont elles doivent être chargées. On les trouvera dans la table suivante avec les valeurs de $c = \frac{20 D^a}{9}$, c'est-à-dire de $\frac{4 D^a}{3 n}$ en supposant $n = \frac{1}{3}$.



TABLE VI.

Des diamètres & densités des boulets, bombes, obus, & balles de plomb de 18 à la livre.

Noms des projectiles.	Diametres.	Densités ou valeurs de D.	Logarithmes de $\frac{20 Da}{9} = c.$	Logarithmes de $\frac{1}{c} \times 0,43429448.$	
	pi.				
Boulets de	36	0,52141		3,8486626	5,7891217
	24	0,45370		3,7882520	5,8495323
	18	0,41222		3,7466146	5,8911697
	16	0,39699		3,7302628	5,9075215
	12	0,36053	6091,1	3,6884246	5,9493597
	8	0,31539		3,6303311	6,0074532
	6	0,28588		3,5876670	6,0501173
	4	0,25000		3,5294232	6,1083611
Bombes & obus.	12 p.	0,98611	3627,7	3,8943495	5,7434348
	10	0,83333	4087,6	3,8730724	5,7647119
	8	0,67708	3302,2	3,6895663	5,9482180
	6	0,50000	4452,7	3,6883810	5,9494033
Balles.	0,05092	9755,1	3,0429601	6,5948242	

Avec le secours de cette table on calculera facilement les formules trouvées par la solution des quatre problèmes précédens, en se rappelant que m est un nombre dont le logarithme est $\frac{x}{c} \times 0,43429448.$

Calcul de la formule $u = \frac{v}{m}.$

134. Soit un boulet de 24, chassé avec une vitesse initiale de 1200 pieds par seconde; pour trouver la vitesse qui lui reste après avoir parcouru 150 toises ou 900 pieds, on fera le calcul suivant,

$$l \frac{1}{c} \times 0,43429448 \quad 5,8495323$$

$$l(x = 900) \quad \dots \quad 2,9542425$$

$$l \frac{x}{c} \times 0,43429448 \quad 8,8037748 \text{ dont le nombre}$$

$$\text{ou } lm \dots 0,0636465 \text{ à ôter de}$$

$$l(V = 1200) \quad 3,0791812$$

$$\text{reste } lu \dots 3,0155347 = l \, 1036,415.$$

Donc au bout de 900 pieds, ou 150 toises, la vitesse du boulet n'est plus que d'environ 1036 pieds.

Calcul de la formule $V = mu$.

135. Si un boulet de 24 arrivé à un but éloigné de 150 toises, ou 900 pieds, a besoin d'une vitesse de 1036 pieds pour produire son effet, on trouvera sa vitesse initiale, ou la vitesse avec laquelle il doit sortir du canon, par le calcul suivant.

Puisque $x = 900$, on a comme dans l'exemple précédent

$$lm \dots 0,0636465$$

$$\text{ajoutez } lu \quad 3,01553598$$

$$lV \quad 3,0790063 = l \, 1199,52.$$

C'est donc avec une vitesse d'environ 1200 pieds par seconde que le boulet doit être chassé, pour qu'à la distance de 150 toises sa vitesse restante soit de 1036 pieds.

$$\text{Calcul de la formule } t = \frac{c}{V} (m - 1).$$

136. Le même boulet étant chassé avec la même vitesse initiale, on trouvera le tems qu'il met à parcourir un espace de 900 pieds, par le calcul suivant.

On aura comme dans l'exemple précédent :

$$\begin{array}{l} l m \dots 0,0636465 \text{ dont le nombre est} \\ m \dots 1,157835 \\ \text{donc } m - 1 \dots 0,157835 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} l(m-1) \dots 9,1982034 \\ l c \dots 3,7882520 \\ \text{comp. } l V \dots 6,9208188 \end{array}$$

$$l t \dots 9,9072742 = l 0,808.$$

Ce boulet met donc environ $\frac{8}{10}$ de seconde à parcourir 150 toises.

$$\text{Calcul de la formule } V = \frac{c}{t} (m-1).$$

137. Pour connoître la vitesse initiale d'un boulet de 16, sachant qu'il a parcouru 215 toises ou 1290 pieds en $1 \frac{1}{4}$ seconde, on fera l'opération suivante :

$$\begin{array}{l} l \frac{1}{c} \times 0,43429448 \dots 5,9075215 \\ l(x=1290) \dots 3,1105897 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} l \frac{x}{c} \times 0,4342, \&c. \dots 9,0181112 \text{ dont le nombre} \\ \text{ou } l m \dots 0,1042584 \\ \text{donc } m \dots 1,27133 \\ m-1 \dots 0,27133 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} l(m-1) \dots 9,4334978 \\ l c \dots 3,7302628 \\ \text{comp. } l(t=1,25) \dots 9,9030900 \end{array}$$

$$l V \dots 3,0668506 = l 1166,4.$$

Donc un boulet de 16 doit être chassé avec une vitesse initiale de 1166 pieds par seconde, pour qu'en $1 \frac{1}{4}$ sec. il parcoure 215 toises.

Calcul de la formule $m = \frac{Vt}{c} + 1$.

138. Pour connoître l'espace qu'un boulet de 16 parcourt en $\frac{1}{4}$ de seconde, étant chassé avec une vitesse initiale de 1200 pieds par seconde.

$$l(V = 1200) \dots\dots 3,0791812$$

$$l(t = 0,75) \dots\dots 9,8750613$$

$$\text{comp. } lc \dots\dots\dots 6,2697372$$

$$l \frac{Vt}{c} \dots\dots\dots 9,2239797 \text{ dont le nombre}$$

$$\frac{Vt}{c} \dots\dots\dots 0,167487$$

$$\text{donc } m = \frac{Vt}{c} + 1 \dots\dots 1,167487$$

$$lm = \frac{\pi}{c} \times 0,4342, \&c. \dots\dots 0,0672521$$

$$l \frac{\pi}{c} \times 0,43429, \&c. \dots\dots 8,8277058$$

$$lc \dots\dots\dots 3,7302628$$

$$\text{comp. } l 0,43429, \&c. \dots\dots 0,3622157$$

$$lx \dots\dots\dots 2,9201843 = l 832 \text{ pieds.}$$

Donc un boulet de 16 chassé avec une vitesse initiale de 1200 pieds, parcourra 832 pieds ou 139 toises en $\frac{1}{4}$ de seconde.

139. Quoique ces formules ne donnent point encore la nature de la courbe décrite par les projectiles, elles peuvent néanmoins utilement servir à déterminer toutes les circonstances du tir du canon, lorsqu'on tire de but en blanc, c'est-à-dire lorsqu'on dirige la ligne de mire sur l'objet même que l'on veut frapper, ou sur un point quelconque par lequel on se propose de faire passer le boulet. En effet, dans cette manière d'employer le canon, que la justesse

qui en résulte devroit faire préférer à toute autre, on n'a jamais à considérer que l'angle formé par la ligne de mire & l'axe de la pièce, ou celui que cet axe fait avec la droite menée du canon au but (§. 79); angle communément très-petit; enforte que le chemin parcouru par le boulet, depuis le canon jusqu'au point où sa courbe rencontre la ligne de mire, diffère très-peu de la droite menée de la bouche du canon au but; & qu'en déterminant l'une de ces deux lignes, on a une connoissance suffisamment exacte de l'autre. Voyons donc comment, à l'aide de ces formules, on peut déterminer les portées de but en blanc, & en faire l'application aux différens cas qui peuvent se présenter dans la pratique.

Du tir du canon de but en blanc.

140. Soit x la portion de courbe décrite par le boulet depuis le canon jusqu'à l'intersection de cette courbe avec la ligne de mire; V la vitesse initiale du projectile, & m un nombre dont le logarithme hyperbolique est $= \frac{x}{c}$, ou le logarithme des tables $= \frac{x}{c} \times 0,43429448$; le tems employé à parcourir l'espace x fera $t = \frac{x}{V} (m - 1)$. (§. 130). Il ne s'agit plus que d'avoir une autre expression du même tems: supposons d'abord au canon une direction telle que la ligne de mire GHCF (fig. 24) soit horizontale; F étant l'intersection de cette ligne avec la courbe décrite par le boulet, & ABCE l'axe de la pièce. La verticale EF fera la hauteur dont le boulet tomberoit en vertu de la pesanteur dans le même tems qu'il a été transporté de A en F. Et comme, en menant l'horizontale BD par le centre de la bouche du canon,

ED ne diffère que très-peu de EF, le tems de la chute par ED pourra, sans erreur, être pris pour le tems de la chute par EF. Or dans le triangle EBD on a $ED = BD \times \text{tang. EBD}$ (§. 5), ou, en nommant l'angle de mire $HCB = EBD$, & x la distance BD, $ED = x \text{ tang. I}$; donc le tems de la chute par ED sera exprimé par $\sqrt{\frac{x \text{ tang. I}}{15,1}}$. Ce tems étant égal à celui du trajet de B en F, on a l'équation $\sqrt{\frac{x \text{ tang. I}}{15,1}} = \frac{c}{V}$ ($m - 1$), qui donne $\frac{V^2 \text{ tang. I}}{15,1 \ c c} = \frac{(m - 1)^2}{x}$. Mais m est une quantité qui a $\frac{x}{c}$ pour logarithme hyperbolique, prenant donc c pour le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, on aura $m = e^{\frac{x}{c}}$; & comme, par les propriétés de ce dernier nombre, on a $e^{\frac{x}{c}}$ ou $m = 1 + \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{6c^3} + \&c.$ on aura $m - 1 = \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{6c^3} + \&c.$ donc $\frac{(m - 1)^2}{x} = \frac{x}{c^2} + \frac{x^2}{c^3}$; on peut négliger les termes suivans, parce que les puissances de c sont dans chaque terme plus grandes que celles de x , & que dans le cas présent, où il s'agit de boulets de fer, les puissances de c croissent suivant un bien plus grand rapport que celles de x . On a donc $\frac{(m - 1)^2}{x}$ ou $\frac{V^2 \text{ tang. I}}{15,1 \ c c} = \frac{x}{c^2} + \frac{x^2}{c^3}$, donc $x^2 + c x = \frac{c V^2 \text{ tang. I}}{15,1}$; équation qui renferme tout ce qui est nécessaire de considérer dans la pratique du tir de but en blanc.

141. Quoique cette équation soit tirée de celle-ci $\sqrt{\frac{x \text{ tang. I}}{15,1}} = \frac{c}{V} (m - 1)$, dans le premier membre de laquelle x représente la distance horizontale BD, tandis

que dans le second la même lettre est prise pour la courbe BfF décrite par le boulet ; il n'est pas à craindre que de cette même dénomination de deux quantités différentes il puisse résulter aucune erreur sensible ; parce que , comme on l'a déjà observé , la différence entre ces quantités est si petite , qu'on peut les regarder comme étant égales , surtout dans la pratique , où l'on est toujours exposé à rencontrer des différences beaucoup plus considérables.

142. Nous venons de supposer que la ligne de mire est parallèle à l'horizon ; si elle étoit inclinée , comme dans la figure 23 , la verticale EF dont le boulet tomberoit dans le même tems qu'il est transporté de B en F , seroit égale à $ED - FD = BD \text{ tang. } EBD - BD \text{ tang. } FBD$ (§. 5) , & à cause de $BD = BF \cos. FBD = x \cos. FBD$, on auroit $EF = x \cos. FBD (\text{tang. } EBD - \text{tang. } FBD)$; le tems de la chute par EF seroit donc $= \sqrt{\frac{x}{15,1} \cos. FBD (\text{tang. } EBD - \text{tang. } FBD)}$; où l'on voit que ce cas ne diffère du précédent qu'en ce qu'au lieu de $\text{tang. } I$ on a $\cos. FBD (\text{tang. } EBD - \text{tang. } FBD)$: mais nous observerons que cette dernière quantité ne diffère que très-peu de $\text{tang. } I$, l'angle I étant l'excès de EBD sur FBD ; ce que cette expression indique assez par elle-même , & qu'il est aisé de vérifier par le calcul. On pourra donc , dans tous les cas de pratique , se servir de l'équation $xx + cx = \frac{c V^2 \text{ tang. } I}{15,1}$, à laquelle nous nous en tiendrons avec d'autant plus de confiance , qu'il est prouvé par l'expérience , qu'elle est suffisamment exacte ; d'ailleurs elle dispense de connoître l'inclinaison de la pièce à l'égard de l'horizon , ce qui est un avantage précieux dans une infinité de circonstances.

143. Ce qu'il y a donc d'essentiel à considérer dans le tir du but en blanc, c'est, 1°. la vitesse initiale du projectile; 2°. l'angle de mire, ou l'angle que la ligne de mire fait avec l'axe de la pièce; 3°. l'éloignement de l'objet qu'on veut frapper en tirant de but en blanc; à quoi l'on peut ajouter, 4°. la hausse qu'il faut employer pour se procurer l'angle de mire donné ou trouvé. Deux des trois premières quantités étant connues, on trouvera la troisième par le moyen de l'équation $xx + cx = \frac{cV^2 \text{ tang. } I}{15,1}$, de laquelle on tire,

144. 1°. La valeur de $V = \sqrt{\frac{15,1}{\text{tang. } I} \left(\frac{xx}{c} + x \right)}$.

145. 2°. La valeur de $\text{tang. } I = \frac{15,1}{V^2} \left(\frac{xx}{c} + x \right)$.

146. 3°. La valeur de $x = c \left[\sqrt{\left(\frac{V^2 \text{ tang. } I}{15,1 c} + \frac{1}{4} \right)} - \frac{1}{2} \right]$.

147. A l'égard de la hausse, on la trouvera par la table V, ou par la formule $\text{tang. } I \times l - (m - n)$, dans laquelle les lettres l, m, n représentent les mêmes quantités qu'à l'article 70, & dont les valeurs sont comprises dans la table I. Si cette formule de la hausse donnoit un résultat négatif, ce qui arrivera toutes les fois que l'angle de mire sous lequel on doit tirer, est moindre que l'angle de mire naturel du canon, tel qu'on le trouve pour chaque calibre dans la table I; il faudroit baisser la ligne de mire du côté de la culasse, ou la hausser au dessus du boulet: mais comme l'un est impossible & l'autre souvent impraticable, on dirigera dans ce cas la ligne de mire naturelle de la pièce, au dessous de l'objet que le boulet doit frapper, d'une quantité quatrième proportionnelle à la longueur l , à la hausse trouvée, & à la distance de l'objet; c'est-à-dire d'une quantité =

$\frac{h d}{l}$, en nommant la hausse trouvée h , & d la distance du but. Les exemples suivans pourront servir à faciliter l'usage des formules que l'on vient de trouver.

148. Calcul de la formule $V = \sqrt{\frac{15,1}{\text{tang. } l} \left(\frac{x x}{c} + x \right)}$.

Exemple I. Supposant un but éloigné de 360 toises ou 2160 pieds, que l'on veut atteindre en tirant de but en blanc, avec une piece de 24, & sous l'angle de mire naturel de cette piece, qui est de $1^{\circ} 15' 6''$; on trouvera la vitesse initiale avec laquelle ce boulet doit être chassé, par le calcul suivant.

$$\begin{array}{rcl}
 l x x & & 6,6689076 \\
 \text{comp. } l c & & 6,2117480 \\
 \hline
 l \frac{x x}{c} & & 2,8806550 \text{ dont le nombre est} \\
 & \frac{x x}{c} = & 759,72 \\
 & \text{ajoutez } x = & 2160 \\
 \hline
 & \frac{x x}{c} + x = & 2919,72 \\
 l \left(\frac{x x}{c} + x \right) & . & 3,4653412 \\
 l 15,1 & & 1,1789769 \\
 \text{comp. } l \text{ tang. } l & & 1,6605648 \\
 \hline
 & & 6,3048829 \\
 l V & . . . & 3,1524414 = l 1420,5
 \end{array}$$

Donc le boulet de 24 doit avoir une vitesse initiale de 1420 pieds par seconde, pour que la portée du but en blanc naturel de la piece de ce calibre soit de 360 toises.

Exemple II. La même piece devant être tirée de but en

blanc à la même distance, sous un angle de mire de deux degrés, on aura la vitesse initiale du boulet, & la hausse, de la manière suivante : on a comme ci-dessus.

$$\begin{array}{r}
 l \left(\frac{x}{c} + x \right) \cdot 3,4653412 \\
 l \ 15,1 \dots\dots 1,1789769 \\
 \text{comp. } l \ \text{tang. } I \dots\dots 1,4569162 \\
 \hline
 6,1012343 \\
 l \ V \dots 3,0506171 = l \ 1124
 \end{array}$$

Calcul de la hausse.

$$\begin{array}{r}
 l \ \text{tang. } 2^\circ \dots\dots 8,5430838 \\
 l \ (l = 117,63) \ 2,0705181 \\
 \hline
 0,6136019 \\
 \text{dont le nombre} = 4,1077 \\
 \text{ôtez-en } m - n = 2,57 \\
 \hline
 \text{reste de la hausse} = 1,5377 = 1 \text{ po } 6 \text{ li } 6 \text{ pt.}
 \end{array}$$

Ainsi pour remplir l'objet de cet exemple, il faut que le boulet ait une vitesse initiale de 1124 pieds par seconde, & qu'on emploie une hausse de 1 po. 6 li. 6 pt.

$$149. \text{ Calcul de la formule } \text{tang. } I = \frac{15,1}{V^2} \left(\frac{x}{c} + x \right).$$

Exemple I. On demande sous quel angle de mire il faut tirer une pièce de 16 placée à 322 toises, ou 1932 pieds d'un but que l'on veut frapper en tirant de but en blanc ; le boulet ayant une vitesse initiale de 1412 pieds par seconde.

$$l x x \dots 6,5720142$$

$$\text{comp. } l c \dots 6,2697372$$

$$l \frac{x x}{c} \dots 2,8417514 \text{ dont le nombre est}$$

$$\frac{x x}{c} = \dots 694,63$$

$$\text{ajoutez } x = \dots 1932$$

$$\frac{x x}{c} + x = 2626,63$$

$$l \left(\frac{x x}{c} + x \right) 3,4193988$$

$$l 15,1 \dots 1,1789769$$

$$\text{comp. } l V^2 \dots 3,7003306$$

$$l \text{ tang. } I \dots 8,2987063 = l \text{ tang. } 1^{\circ} 8' 20''.$$

Or cet angle est précisément l'angle de mire naturel de la pièce de 16, donc 322 toises est la portée du but en blanc naturel de cette pièce, lorsque la vitesse initiale du boulet est de 1412 pieds.

Exemple II. On demande sous quel angle de mire il faut tirer une pièce de 16, pour atteindre de but en blanc un objet éloigné de 200 toises ou 1200 pieds, la vitesse initiale du boulet étant de 530 pieds par seconde, faites le calcul suivant:

$$l x x \dots 6,1583625$$

$$\text{comp. } l c \dots 6,2697372$$

$$l \frac{x x}{c} \dots 2,4280997 \text{ dont le nombre est}$$

$$\frac{x x}{c} = \dots 267,98$$

$$\text{ajoutez } x = \dots 1200$$

$$\frac{x x}{c} + x = 1467,98$$

$$l \left(\frac{x^2}{c} + x \right) 3,1667202 \dots$$

$$l 15,1 \dots 1,1789769$$

$$\text{comp. } l V^2 \dots 4,5514482$$

$$l \text{ tang. } I \dots 8,8971453 = l \text{ tang. } 4^\circ 30' 43''$$

$$l(l=113,18) 2,0537697$$

$$l(\text{tang. } I \times l) 0,9509150 \text{ dont le nombre est } 8,9313 \text{ po.}$$

$$\text{ôtez } m - n = 2,25$$

$$\text{reste la hausse} = 6,6813 = 6 \text{ po. } 8 \text{ li. } 2 \text{ pt.}$$

L'angle de mire doit donc être de $4^\circ 30' 43''$, & la hausse de 6 po. 8 li. 2 pt.

Exemple III. Si l'éloignement du but est de 250 toises ou 1500 pieds, & la vitesse initiale du boulet de 1325 pieds par seconde, on aura l'angle de mire pour une pièce de 16, par le calcul suivant.

$$l x x \dots 6,3521825$$

$$\text{comp. } l c \dots 6,2697372$$

$$l \frac{x^2}{c} \dots 2,6219197 \text{ dont le nombre est}$$

$$\frac{x^2}{c} = \dots 418,71$$

$$\text{ajoutez } x = \dots 1500$$

$$\frac{x^2}{c} + x = \dots 1918,71$$

$$l \left(\frac{x}{c} + x \right) \dots 3,2830094$$

$$l \ 15,1 \dots \dots \dots 1,1789769$$

$$\text{comp. } l \ V^2 \dots \dots \dots 3,7555682$$

$$l \ \text{tang. } I \dots \dots 8,2175545 = l \ \text{tang. } 0^\circ 56' 44''$$

$$l \ (I = 113,18) \ 2,0537697$$

$$l \ (\text{tang. } I \times I) \ 0,2713242 \text{ dont le nombre est } 1,868 \text{ po.}$$

$$\text{ôtez } m - n = 2,25$$

reste la hausse négative $- 0,382 = - 0 \text{ po. } 4 \text{ li. } 7 \text{ pt.}$

C'est-à-dire que pour tirer dans ce cas de but en blanc, il faudroit mettre sur le bourlet de la bouche du canon une hausse de 4 li. 7 pt. ou bien employer la ligne de mire naturelle de la piece, & la diriger au dessous du but d'une quantité $= \frac{h d}{l}$ (§. 145), que l'on trouve être d'environ 5 pieds.

$$150. \text{ Calcul de la formule } x = c \left[\sqrt{\left(\frac{V^2 \text{ tang. } I}{15,1 c} + \frac{1}{4} \right)} - \frac{1}{2} \right].$$

Exemple I. Pour connoître la portée du but en blanc naturel d'une piece de 24, lorsque la vitesse initiale du boulet est de 1420 pieds par seconde, on fera le calcul suivant :

$$l \ V^2 \dots \dots \dots 6,3045766$$

$$l \ \text{tang. } I \dots \dots \dots 8,3394352$$

$$\text{comp. } l \ 15,1 \dots \dots \dots 8,8210231$$

$$\text{comp. } l \ c \dots \dots \dots 6,2117480$$

$$l \ \frac{V^2 \text{ tang. } I}{15,1 c} \dots \dots 9,6767829 \text{ dont le nombre}$$

	est . .	0,475097	
ajoutez $\frac{1}{4} =$. . .	0,25		
	<u>0,725097</u>		
dont le log. . . .	9,8603961	, prenant la moitié	
on a $l \sqrt{\left(\frac{V^2 \text{ tang. } l}{15,1^2} + \frac{1}{4}\right)}$	9,9301980	dont le nombre	
	est . .	0,85152	
ôtez-en $\frac{1}{2} =$. . .	0,5		
	<u>reste . .</u>	0,35152	dont le log.
	est . .	9,5459500	
$l c$	<u>3,7882520</u>		
$l x$	3,3342020	$= l 2158,8$	pi.

La portée de but en blanc est donc , dans ce cas , de 2158,8 pieds , ou d'environ 360 toises.

Exemple II. Pour trouver la distance à laquelle on doit placer une pièce de 16 pour tirer de but en blanc avec une hausse de 8 lignes , la vitesse initiale du boulet étant de 1412 pieds par seconde , on cherchera d'abord l'angle de mire qui résulte de la hausse de 8 lignes ; or puisque (§. 81) $h = \text{tang. } l \times l - (m - n)$, on aura $\text{tang. } l = \frac{h + m - n}{l} =$ (dans ce cas) $\frac{2,9166}{113,18}$. On fera donc le calcul suivant :

$l 2,9166$	0,4648868	
comp. $l 113,18$	<u>7,9462303</u>	
$l \text{ tang. } l$	8,4111771	
$l V^2$	6,2996694	
comp. $l 15,1$	<u>8,8210231</u>	
comp. $l c$	<u>6,2697372</u>	
$l \frac{V^2 \text{ tang. } l}{15,1^2}$	9,8015468	dont le nombre

est . . 0,63321
ajoutez $\frac{1}{4} = \dots$ 0,25

0,88321

dont le log. . . . 9,9460640 la moitié donne

$lV \left(\frac{V^2 \text{ tang. } I}{15,1 c} + \frac{1}{4} \right)$ 9,9730320 dont le nombre

est . . 0,9398

ôtez-en $\frac{1}{2} = \dots$ 0,5

reste . . 0,4398

dont le log. . . . 9,6432552

$lc \dots\dots\dots$ 3,7302628

$lx \dots\dots\dots$ 3,3735180 = $l\ 2363$.

C'est donc à la distance de 2363 pieds, ou d'environ 394 toises qu'il faut ainsi tirer la pièce de 16.

151. Les formules dont nous venons de détailler les calculs étant le fondement de la pratique du tir du canon, nous n'avons pas craint d'en multiplier les exemples, l'usage n'en pouvant être rendu trop familier. Tous les cas y sont présentés ; & si nous n'avons point parlé de la situation du but relativement au niveau de la batterie, c'est que cette circonstance est tout-à-fait inutile à considérer dans le tir de but en blanc. Il importe peu que l'objet qu'on se propose de frapper, ou le point par lequel on veut faire passer le boulet, soit au dessus ou au dessous de ce niveau ; que la pièce soit inclinée ou non à l'horizon : cela ne change rien à l'effet du tir de but en blanc. L'unique objet de cette manière de tirer est de diriger la ligne de mire naturelle ou artificielle de la pièce sur le point que le boulet doit frapper, & dont il suffit

de connoître la distance, sans s'embarrasser de sa situation à l'égard de l'horizon.

152. Pour n'avoir aucun doute à ce sujet, reprenons l'exemple II du calcul de la formule $\text{tang. I} = \frac{15,1}{\sqrt{x}}$ $\left(\frac{x}{c} + x\right)$, & ajoutons-y la condition que le but F (fig. 23) soit élevé de 30 pieds au dessus de l'horizontale BD : la valeur qu'on a trouvée dans cet exemple pour tang. I, sera celle de cos. FBD (tang. EBD — tang. FBD) (§. 142) ; c'est-à-dire qu'on doit avoir $8,8971453 = l \cos. FBD + l (\text{tang. EBD} - \text{tang. FBD})$; mais puisque BF = 1200 & FD = 30, $l \cos. FBD$ sera = 9,9998643, lequel étant retranché de 8,8971453, il reste $8,8972810 = l (\text{tang. EBD} - \text{tang. FBD})$; prenant les nombres on aura $0,0789371 = \text{tang. EBD} - \text{tang. FBD}$, d'où l'on tire, à cause de tang. FBD = 0,0250070, tang. EBD = 0,1039441, qui répond à $5^\circ 56' 3''$ pour la valeur de l'angle EBD ; ôtez-en $1^\circ 25' 57''$ valeur de l'angle FBD, l'angle de mire EBF. fera de $4^\circ 30' 6''$ dont le $l \text{ tang.}$ est 8,8961457, ce qui donne une hausse de 6,6608 pouces, qui ne diffère de celle qu'on a trouvée dans l'exemple que de 0,0205 po. ou d'environ 3 points ; différence peu sensible qui ne peut occasionner qu'une erreur beaucoup moindre que les erreurs les plus communes de la pratique.

153. Si dans le premier exemple de la formule $V = \sqrt{\frac{15,1}{\text{tang. I}} \left(\frac{x}{c} + x\right)}$, on suppose le but élevé de 50 pieds au dessus du niveau de la batterie, on trouvera $l (\cos. FBD (\text{tang. EBD} - \text{tang. FBD})) = 8,3397702$; & cette valeur mise à la place de $l \text{ tang. I}$, il en résultera

une vitesse initiale de 1419,95 pieds ; moindre seulement de 0,55 que celle qu'on a eue en ne considérant que l'angle de mire de la piece , sans avoir égard à son inclinaison sur l'horizon.

154. Enfin , si dans le premier exemple de la troisieme formule on suppose l'axe du canon incliné de 5 degrés sur l'horizon , on trouvera 8,3419150 pour le logarithme de $\cos. FBD$ ($\text{tang. } EBD - \text{tang. } FBD$) , qu'il faut mettre à la place de $\text{tang. } I$ dans le calcul de cette formule ; & au lieu d'une portée de but en blanc de 2158,8 pieds , on en aura une de 2168,6 qui n'est plus grande que de 9,8 ; ou d'environ la 220^{me}. partie.

155. Ces différences appréciées à leur juste valeur , eu égard à la pratique du service , on doit être bien convaincu qu'elles ne sont d'aucune conséquence pour la justesse du tir ; & qu'elles ne doivent pas nous faire sacrifier l'avantage d'un calcul très-simple pour la précision inutile d'une 2000^{me}. partie dans la vitesse initiale du projectile ; d'une 300^{me}. partie dans la hausse , & d'une 200^{me}. dans la portée. C'est un degré de précision dont la pratique n'est nullement susceptible.

156. Dans tout ce qui précède nous avons supposé que l'angle de mire BCH (fig. 18) formé par la ligne de mire GHC & l'axe de la piece , est égal à l'angle CBF que le même axe fait avec la droite BF menée de la bouche du canon au but. Cette supposition , qui peut être admise lorsque le but est à une grande distance ; induiroit en erreur s'il étoit plus rapproché : mais l'erreur ne tomberoit que sur la détermination de la hausse négative ; en ce qu'il en résulteroit pour cette hausse une valeur qui augmenteroit à mesure que le but seroit moins éloigné

du canon, ce qui ne peut pas être : car il est clair que, pour atteindre un but situé à chacune des intersections de la ligne de mire avec la trajectoire du projectile, la hausse doit être nulle, & qu'il faut diriger la ligne de mire sur le but ; de sorte que de l'une de ces intersections à l'autre la hausse négative doit augmenter jusqu'à un certain point, diminuer ensuite & devenir zéro. Il y a donc entre ces deux points d'intersection une position du but où la hausse négative est un *maximum*, & une autre position où la quantité dont il faut pointer plus bas que le but est aussi un *maximum*.

157. La position ou la distance du but qui donne ce dernier *maximum* peut se déterminer, sans qu'il soit nécessaire d'avoir égard à l'angle au but BFC, & par le moyen de l'équation $\text{tang. I} = \frac{15,1}{V^2} \left(\frac{x^2}{c} + x \right)$. On a vu (§. 82) que l'expression de la hausse est $\text{tang. I} \times l - (m - n)$; & celle de la quantité dont il faut pointer plus bas que le but, $(\text{tang. I} \times l - (m - n)) \frac{x}{l} = \frac{15,1}{V^2} \left(\frac{x^3}{c} + x x \right) - \frac{(m - n)}{l} x$. Si l'on prend la différentielle de cette expression, on aura, en l'égalant à zéro,

$$x = \frac{c}{3} \left(\sqrt{\left(\frac{3}{15,1} \frac{V^2}{c} \times \frac{m - n}{l} + 1 \right)} - 1 \right)$$

qui donne une valeur suffisamment exacte de la distance à laquelle il faut pointer le plus bas au dessous du but pour l'atteindre.

Ainsi, pour savoir à quelle distance doit être le but pour pointer le plus bas possible, avec une pièce de 24, lorsque la vitesse initiale du boulet est de 800 pieds par seconde, on fera le calcul suivant.

158. Calcul de la formule

$$x = \frac{c}{3} \left(\sqrt{\left(\frac{3}{15,1} \frac{V^2}{c} \times \frac{m-n}{L} + 1 \right)} - 1 \right).$$

$$L. V^2 \dots\dots 5,8061800$$

$$L. 3 \dots\dots 0,4771213$$

$$\text{comp. } L. 15,1 \dots\dots 8,8210231$$

$$\text{comp. } L. c \dots\dots 6,2117480$$

$$L. m - n \dots\dots 0,4099331$$

$$\text{comp. log. } L. \dots\dots 7,9294819$$

$$9,6554874 \text{ dont le nombre}$$

$$\text{est} \dots 0,45236$$

$$\text{ajoutez} \dots 1$$

$$1,45236$$

$$\text{dont le log. } 0,1620742$$

$$\text{la moitié} \dots 0,0810371 \text{ dont le nombre}$$

$$\text{est} \dots 1,20514$$

$$\text{ôtez-en} \dots 1$$

$$\text{reste} \dots 0,20514$$

$$\text{dont le log. } 9,3120504$$

$$L. \frac{c}{3} \dots\dots 3,3111307$$

$$2,6231811 = \log. 420 \text{ pi} = 70 \text{ to.}$$

C'est donc lorsque le but est éloigné de 70 toises qu'il faut, dans le cas de cet exemple, pointer plus bas qu'à toute autre distance. Il n'est plus question que de savoir de combien, à cette distance, il faut pointer plus bas que le but.

159. Comme cette quantité dépend de la hausse correspondante à la même distance, l'erreur pourroit devenir sensible si l'on négligeoit de considérer l'angle au but BFC, que nous avons confondu jusqu'à présent avec l'angle de mire, sous la même dénomination I. Soit donc l'angle au but $= i$, au lieu de l'équation $\text{tang. } I = \frac{15,1}{V^2} \left(\frac{x^2}{c} + x \right)$, nous aurons $\text{tang. } (I - i) = \frac{15,1}{V^2} \left(\frac{x^2}{c} + x \right)$; de sorte que, connoissant l'angle i par la distance connue x , on l'ajoutera à l'angle $I - i$ trouvée par la dernière équation, ce qui donnera l'angle de mire I; alors $\text{tang. } I \times l - (m - n)$ fera la hausse, & $(\text{tang. } I \times l - (m - n)) \frac{x}{l}$ la quantité dont on pointerà plus bas que le but. Appliquons ceci au dernier exemple, en supposant $x = 420$ pieds, & $V = 800$ pieds,

$$\begin{array}{rcl}
 l. x^2 & & 5,2464986 \\
 \text{comp. } l. c & & 6,2117480 \\
 \hline
 l. \frac{x^2}{c} & & 1,4582466 \text{ dont le nombre} \\
 & \text{est } . . . & 28,72 \\
 & \text{ajoutez } x . . & 420 \\
 \hline
 \frac{x^2}{c} + x & . . . & 448,72 \\
 \text{dont le log.} & . . & 2,6519754 \\
 l. 15,1 & & 1,1789769 \\
 \text{comp. } l. V^2 & & 4,1938200 \\
 \hline
 l. \text{tang. } (I - i) & . . . & 8,0247723 = l. \text{tang. } 36' 24'' \\
 & \text{à la distance de 70 toises on a l'angle } i & 4' 24'' \\
 \hline
 & \text{donc l'angle de mire } I \text{ est de } . . . & 40' 48''
 \end{array}$$

$$\log. \text{ tang. } I \dots\dots 8,0744067$$

$$\log. l \dots\dots\dots 2,0705181$$

$$\log. \text{ tang. } I \times l \dots\dots 0,1449248$$

$$\text{tang. } I \times l \dots\dots 1,3961$$

$$\text{Ôtez } m - n \dots\dots 2,57$$

$$\text{reste la hausse négative} - 1,1739$$

$$\text{dont le log.} \dots\dots 0,0696311$$

$$\log. x \dots\dots\dots 2,6232493$$

$$\text{comp. log. } l \dots\dots\dots 7,9294819$$

$$0,6223623 = 4,1914 \text{ pieds.}$$

Il faut donc, dans le cas de cet exemple, pointer, ou diriger la ligne de mire naturelle de la pièce à 4,1914, ou 4 pi 2 po 3 li au dessous du but.

Si l'on n'avoit point eu égard à l'angle au but i , on auroit trouvé la hausse négative $-1,3246$ po, au lieu de $-1,1739$; & 4 pi 8 po 9 li pour la quantité dont il faut pointer plus bas que le but, au lieu de 4 pi 2 po 3 li. La différence 6 po 6 li de ces deux résultats est sans doute de peu de conséquence dans la pratique; mais l'exactitude de la théorie ne permet point d'en ignorer la valeur.

On voit donc que lorsque la vitesse initiale du boulet de 24 est de 800 pieds par seconde, on n'est jamais dans le cas de pointer la pièce au dessous du but de plus que 4 pi 2 po 3 li, & qu'il faut pour cela que le but soit éloigné du canon de 70 toises.

160. A l'égard du *maximum* de la hausse négative, voici comment on pourra la trouver : l'expression de la hausse est $\text{tang. } I \times l - (m - n)$, dont il faut prendre la différentielle & l'égalér à zéro, pour en déduire la

distance du but qui donne ce *maximum* ; ou simplement prendre la différentielle de tang. I, parce que les quantités l, m, n sont constantes dans chaque calibre. Or en considérant l'angle au but i , on a tang. $(I - i) = \frac{15,1}{V^2} \left(\frac{x}{c} + x \right)$, d'où il faut tirer la valeur de tang. I: on observera à cet effet que tang. $(I - i) = \frac{\text{tang. } I - \text{tang. } i}{1 + \text{tang. } I \text{ tang. } i}$ (§. 13) & que tang. $i = \frac{n}{x}$ (§. 5);

$$\text{on a donc, en faisant } 15,1 = g, \quad \frac{\text{tang. } I - \frac{n}{x}}{1 + \frac{n}{x} \text{ tang. } I} \\ = \frac{g x x + g c x}{c V^2}, \text{ ce qui donne tang. } I = \frac{g x^2 + g c x^2 + n c V}{c V^2 x - n g x^2 - n g c x}.$$

La différentielle de cette valeur de tang. I, en prenant x pour variable, étant égale à zéro, on a l'équation $x^4 + 2 c x^3 + c^2 x^2 - \frac{2 n c V^2 x}{g} + \frac{c^2 V^4}{g g} = 0$ $-\frac{2 c V^2 x^3}{g n} - \frac{c^2 V^2 x^2}{g n} - \frac{n c^2 V^2}{g}$, dont une des racines donne la distance x qui répond à la plus grande hausse négative. Mais comme la recherche de cette racine donneroit lieu à des calculs trop longs, on remarquera que dans le cas des projectiles lancés par le canon, les termes $\frac{2 c V^2 x^3}{g n}$, $\frac{c^2 V^2 x^2}{g n}$, & $\frac{c^2 V^4}{g g}$ sont ordinairement très-grands par rapport aux autres termes de cette équation; & qu'on aura toujours une approximation suffisante en supposant $\frac{2 c V^2 x^3}{g n} + \frac{c^2 V^2 x^2}{g n} - \frac{c^2 V^4}{g g} = 0$, ou, multipliant par $g n$ & divisant par $2 c V^2$, $x^3 + \frac{1}{2} c x^2 - \frac{n c V^2}{2 g} = 0$. Or cette équation n'exige qu'un calcul très-simple pour avoir la valeur de x : car dans toute équation

de cette forme $x^3 + p x^2 - q = 0$, il est aisé de voir que x doit être plus grand que $\frac{\sqrt[3]{q}}{\sqrt[3]{q+p}}$, & plus petit que $\sqrt{\frac{q}{p}}$. Supposons donc, comme ci-dessus; $V = 800$, &, parce qu'il s'agit d'une pièce de 24; $n = 0,5375$ pieds, on trouvera que x doit être > 142 pieds & < 151 pieds; d'où l'on peut conclure, & cela suffit pour notre objet, que la distance du but à laquelle la hausse négative est la plus grande, se trouve entre 24 & 25 toises. En rapprochant ces limites, on trouvera que cette distance est de 24 to 3 pi 5 po à moins d'un pouce près. Veut-on maintenant savoir quelle est la hausse qui convient à cette distance? On trouvera, en suivant le même procédé qu'à l'art. 147, qu'elle est $= -1,72$ pouces, c'est-à-dire que si l'on vouloit élever la ligne de mire du côté de la bouche du canon, & être dans le cas d'employer pour cela la plus grande hausse, il faudroit que le but fût éloigné de 24 à 25 toises, & cette hausse d'environ 1 pouce 9 lignes.

Du tir à ricochet ou d'enfilade.

161. Nos formules du tir de but en blanc peuvent aussi s'appliquer au tir à ricochet, en prenant pour but le sommet ou la crête du parapet que le boulet doit franchir. Cette manière d'employer le canon imaginée par le célèbre Vauban, fut appelée *tir à ricochet*, parce que c'est dans les ricochets d'un boulet que l'on en faisoit consister le principal effet. Mais si l'on y regarde de près, on verra sans peine que le boulet le plus meurtrier est celui qui parcourt le plus rapidement une courbe peu élevée au

dessus du terre-plein de l'ouvrage de fortification dont il enfile la branche. En effet, soit RH (fig. 33) le terre-plein du rempart d'une face de bastion ; C le sommet du parapet ; MCH la courbe décrite par un boulet ; si le sommet C du parapet est un point de la branche descendante de cette courbe, il est clair que le boulet, en parcourant la portion CH , pourra rencontrer tous les objets dont la hauteur est moindre que l'élévation RC du parapet au dessus du terre-plein RH sur lequel ils sont placés ; qu'il les frappera avec d'autant plus de force que le chemin CH sera moins courbe, plus alongé & le point de chute H plus éloigné du parapet ; qu'il est par conséquent inutile que le boulet fasse des ricochets pour produire un grand effet ; & que cette façon de tirer, si elle est bien employée, devrait plutôt s'appeler *tir d'enfilade*, que *tir à ricochet*. Mais soit qu'on adopte cette nouvelle dénomination, soit que l'on conserve l'ancienne, toujours est-il certain que le boulet, en franchissant le parapet au point C , doit se trouver dans la branche descendante de sa courbe, afin que baissant continuellement de C vers H , rien de ce qui existe sur le rempart ne puisse lui échapper. Telle est ce me semble l'idée qu'on doit se former de ce qu'on appelle *tir à ricochet*, d'après laquelle il n'est plus question que de savoir quelle doit être la vitesse initiale du boulet, pour que partant d'une batterie dont la distance est connue, il franchisse le parapet en parcourant la branche descendante de sa courbe.

162. La théorie qu'on a exposée jusqu'à présent ne donne encore rien à cet égard : nos formules ne distinguent ni la montée ni la descente du boulet dans la courbe qu'il décrit ; mais en attendant que nous ayons une méthode

directe pour examiner ces deux circonstances, nous aurons recours à l'expérience. La perfection de la pratique étant ce que nous avons principalement en vue dans cet ouvrage, il n'importe par quel moyen nous parviendrons à remplir cet objet. Voici donc ce qu'on a eu occasion d'observer ; un canon placé à 150 toises d'un ouvrage de fortification, le boulet mettoit 2 secondes à parcourir cet espace, & se trouvoit dans la branche descendante de sa courbe en franchissant le parapet. A 200 toises un autre boulet se trouvoit dans le même cas en les parcourant en $2\frac{1}{3}$ secondes ; à 250 toises en $2\frac{2}{3}$ secondes, & à 300 toises en 3 secondes environ.

163. Ces observations, quand même elles ne seroient pas bien exactes, suffisoient pour nous conduire dans nos recherches. Remarquons seulement que les conditions du tir à ricochet exigent que le boulet parte du canon suivant une direction peu inclinée à l'horizon : car on conçoit aisément qu'un projectile pourroit, étant lancé sous une inclinaison convenable, parcourir 150 toises en deux secondes ; ou 200 toises en $2\frac{1}{3}$ secondes, &c. avant qu'il soit parvenu au point le plus élevé de sa courbe, ou avant qu'il se trouvât dans sa branche descendante ; c'est ce qui arrive dans le tir des mortiers.

164. Cela posé, voyons quelle est la vitesse initiale qui fait parcourir 150 toises ou 900 pieds en 2 secondes à un boulet de 24. On trouvera cette vitesse par la formule $V = \frac{c}{t} (m - 1)$ (§. 131), dans laquelle faisant $t = 2''$, & mettant 900 pour x dans la valeur de m (§. 130), on aura $V = 485$ pieds. Pour avoir la hausse qu'il faut employer pour tirer de but en blanc à cette distance, on cherchera d'abord tang, I par la formule

tang. I = $\frac{15,1}{V^2} \left(\frac{x^2}{c} + x \right)$ (*), on multipliera cette tangente par la valeur de l relative à la piece de 24, c'est-à-dire par 117,63 pouces, & du produit l'on retranchera $m - n = 2,57$ pouces, ce qui donnera la hausse de 5 pouces 3 lignes. Ainsi, pour enfileur un ouvrage de fortification avec une piece de 24 placée à 150 toises du parapet, il faut que le boulet soit chassé avec une vitesse initiale de 485 pieds par seconde, & qu'en employant une hausse de 5 pouces 3 lignes, on tire de but en blanc sur le sommet du parapet. Bien entendu que la batterie doit être placée perpendiculairement à la prolongation de la face ou branche d'ouvrage que l'on veut enfileur. En tirant de cette maniere, le boulet parcourra infailliblement la branche descendante de la courbe en franchissant le parapet, il produira tout l'effet qu'on doit en attendre sans qu'il soit besoin d'aucun ricochet: ce sera sûrement un tir d'enfilade, & peut-être à ricochet.

165. On peut s'assurer par un calcul très-simple que le boulet s'abaisse en passant au sommet C du parapet qu'il doit franchir (fig. 34), savoir, s'il fera des ricochets sur le terre-plein RH du rempart, & à quelle distance du parapet CR il touchera terre. Soit menée l'horizontale AB par la bouche A du canon, & supposons le point C élevé de 30 pieds au dessus de cette horizontale. Puisque le tems du trajet de A en C est de deux secondes, le boulet arrivé en C se fera abaisser d'environ 60 pieds au dessous de sa premiere direction; prenant donc la ver-

(*) Il est inutile ici de considérer l'angle au but i , qui n'augmenteroit pas la hausse d'une ligne.

ticale CF de 60 pieds, en menant AF, cette droite sera la direction du boulet en sortant du canon. Menez aussi la droite AC; considérons maintenant le boulet au point *h*, ayant encore 20 toises à parcourir avant d'arriver au sommet C du parapet; menez la verticale *m h n d*, on aura AC : AN ou 100 : 130 :: BF : *d m*; or BC = 30 & CF = 60, donc BF = 90 pieds & *d m* = 78 pieds. Pour connoître *m h*, on cherchera le tems que le boulet met à parcourir l'espace A *h* de 130 toises ou 780 pieds, avec la vitesse initiale de 485 pieds, par la formule $t = \frac{c}{v} (m - 1)$ (§. 130); on trouvera que le log. de ce tems est 0,2342252: or on fait que si l'on multiplie le quarré du tems par 15,1, on a la hauteur dont la pesanteur abaisse un corps pendant ce tems, donc ajoutant le log. de 15,1 au double du log. 0,2342252, on aura 1,6474273 pour le log. de *m h*, que l'on trouve être de 44,04 pieds, qu'il faut retrancher de *m d* = 78 pour avoir *h d* = 33,96 pieds. Le point *h* est donc plus élevé que le point C de près de 4 pieds, donc le boulet va en baissant de *h* vers C.

Prenons ensuite le boulet à 20 toises au-delà du parapet, & menons à cette distance la verticale MNHD qui rencontre les droites AF, AC prolongées en M & N; on aura AC : AN, ou 150 : 170 :: BF : DM = 102 pieds. Pour connoître la hauteur MH, dont le boulet arrivé en H s'est abaissé au dessous de sa première direction AM, on cherchera, comme ci-dessus, le tems employé à parcourir 170 toises ou 1020 pieds avec la vitesse initiale de 485 pieds, le log. de ce tems sera 0,3581078, au double duquel ajoutant le log. de 15,1, on aura 1,8951925 pour le log. de MH qui est par

conséquent de 78,558 pieds, retranchant de $MD = 102$; on aura $HD = 23,442$ pieds. Si l'on suppose donc le sommet C du parapet de 7 pieds plus élevé que le terre-plein du rempart, de manière que RB soit de 23 pieds, le boulet touchera terre à un peu plus que 20 toises du parapet. Il ricochera donc à cette distance & se relèvera ensuite plus ou moins selon qu'au point de chute le terrain sera incliné en arrière ou en avant; il pourra même être détourné à droite ou à gauche, si le terrain penche de l'un ou l'autre côté. Mais en se relevant ainsi, il est possible que le boulet passe par-dessus des objets qu'il auroit frappés si la courbe eût été plus alongée; ou si le premier point de chute eût été plus éloigné; ou, ce qui revient au même, si sa vitesse initiale eût été plus grande,

Voyons donc ce qui arrivera si la vitesse initiale du boulet est, par exemple, de 550 pieds au lieu de 485; supposant toujours la distance AC de 150 toises ou 900 pieds, & la hauteur CB du parapet de 30 pieds. On trouvera d'abord en calculant comme au second exemple de la formule $\text{tang. } I = \frac{15,1}{V^2} \left(\frac{x}{c} + x \right)$ (§. 145), que pour atteindre le point C en tirant de but en blanc, il faut employer une hausse de 3,489 pouces; on cherchera ensuite le tems employé à parcourir AC par la formule $t = \frac{c}{V} (m - 1)$; ce tems servira à connoître la verticale CF comprise entre le sommet C du parapet & la première direction AF du boulet, que l'on trouve $= 46,683$ pieds; & par conséquent $BF = 76,683$. Pour savoir maintenant si, en passant au point C, le boulet est dans la branche descendante de sa courbe, on supposera une verticale md à 10 toises de BF, & l'on trouvera $hd = 31,124$

pieds ; ce qui fait voir que le boulet va effectivement en baissant de h vers C. Menons aussi la verticale DM à 30 toises du parapet , on trouvera $DM = 92,019$ & $MH = 69,598$, ce qui donne $HD = 22,421$ pieds , & fait voir que le boulet a touché terre à près de 30 toises du parapet , c'est-à-dire à 10 toises environ plus loin qu'avec la vitesse initiale de 485 pieds , d'où résulte nécessairement un plus grand effet.

Si l'on calcule l'effet d'une vitesse initiale de 600 pieds dans les mêmes circonstances , on trouvera que , pour atteindre le point C de but en blanc , il faut une hausse de 2,52 pouces ; que le boulet passe en baissant au sommet du parapet , & qu'il tombera sur le terre-plein du rempart de 35 à 40 toises du parapet.

166. Comme on ne sauroit se rendre trop familier le tir à ricochet ou d'enfilade , dont nous traitons ici , ainsi que les calculs qui en déterminent les différentes circonstances , ne craignons point de multiplier les exemples , & de proposer encore celui d'une piece de 16 placée à 250 toises de l'ouvrage que l'on veut enfiler. Nous supposerons ici que le sommet C du parapet est élevé de 33 pieds au dessus de l'horizontale AB , & de $7\frac{1}{2}$ pieds au dessus du terre-plein du rempart , de sorte que RB sera de $25\frac{1}{2}$ pieds. Si l'on veut , d'après l'observation rapportée ci-dessus (§. 162) , que le boulet fasse le trajet de 250 toises en $2''\frac{2}{3}$, on trouve par la formule $V = \frac{c}{m-1}$ que sa vitesse initiale doit être de 648,84 pieds , qu'il faut par conséquent employer une hausse de 5,538 pouces , & que le boulet tombera sur le rempart à près de 20 toises du parapet. On pourra donc augmenter la vitesse du boulet , afin qu'il tombe à une plus grande

distance du parapet ; le tableau suivant indique l'effet de plusieurs autres vitesses initiales , & la hausse qu'il faut employer avec chacune pour tirer de but en blanc au sommet du parapet , son élévation au dessus de l'horizontale AB étant toujours de 33 pieds , & sa distance au canon de 250 toises.

*Effets de différentes vitesses initiales du boulet de
16 tiré à 250 toises.*

Vitesses initiales.	Hausse.	Distances de la première chûte au parapet.
750 to. . . . 3 po.	7 li. . . .	de 20 à 22 toises.
800 2	10	de 28 à 30
850 2	3	de 30 à 31
900 1	10	de 31 à 33
1000 1	0	de 49 à 50

Avec toutes ces vitesses & les hausses correspondantes le boulet se trouve dans la branche descendante de sa courbe lorsqu'il passe au point C , comme il est aisé de s'en assurer par le calcul dont nous supprimons les détails , afin de laisser au lecteur le plaisir de les faire lui-même : & nous l'y exhortons d'autant plus , qu'en soumettant au calcul les diverses positions où il peut se trouver , il acquerra la facilité de juger au premier coup d'œil du parti qu'il conviendra de prendre dans chaque circonstance , soit pour le choix de la charge de poudre , d'après la connoissance de la vitesse initiale que le boulet doit avoir , soit pour déterminer la hausse propre à cette vitesse & à la distance du but que l'on se propose d'atteindre en tirant de but en blanc.

167. C'est du tir de but en blanc tant naturel qu'artificiel, & par conséquent de l'usage de la hausse, que dépend essentiellement la justesse du tir : cette manière de tirer exclut tout ce qu'il y a de vague & d'arbitraire dans le pointage ordinaire des pièces de canon. Connoître la distance de l'objet que le boulet doit frapper, ou d'un point par lequel il doit passer ; ce qui est toujours facile par plusieurs moyens très-connus, sans s'embarrasser de la situation de cet objet ou de ce point par rapport au niveau de la batterie ; connoître la vitesse initiale que le boulet doit avoir, & trouver la charge de poudre qui lui imprime cette vitesse, ce que nous verrons dans la suite ; enfin déterminer la hausse qu'il faut employer pour tirer de but en blanc : c'est à quoi se réduisent les principales fonctions d'un Officier chargé du commandement d'une batterie de canon ; quelle qu'en puisse être la destination, il trouvera dans notre théorie (*) les moyens de satisfaire à tous les cas qui peuvent se présenter.

*De la force que différentes charges de poudre exercent
dans le canon.*

168. La théorie que nous venons d'exposer ne seroit qu'une spéculation vaine & inutile à l'artillerie, si l'on ne connoissoit point l'agent qu'il faut employer pour imprimer aux projectiles les diverses vitesses initiales qu'on y a considérées. Nous allons donc nous occuper de cette

(*) Et d'une manière plus expéditive dans nos tables du tir des canons & obusiers, calculées d'après cette théorie.

recherche, tant pour compléter notre théorie du tir des canons, que pour la rendre applicable à la pratique.

La poudre à canon est cet agent dont l'artillerie fait usage pour mettre les projectiles en mouvement, en leur communiquant les degrés de vitesse nécessaires selon les circonstances. La force de la poudre consiste dans l'expansion d'un fluide très-élastique, qui se développe par l'inflammation. Nous ne répéterons point ici ce qui est dit dans les nouveaux principes de Robins, commentés par M. Euler, sur la nature & la manière d'agir de ce fluide : le lecteur voudra bien consulter cet ouvrage dans la traduction que nous en avons donnée. Contentons-nous d'observer que, si l'inflammation d'une charge de poudre étoit instantanée, ou si elle s'enflammoit entièrement dans l'espace qu'elle occupe au fond de l'ame d'une pièce de canon, il seroit facile, connoissant l'effet d'une charge de poudre dans un calibre quelconque, de connoître l'effet dont seroit capable toute autre charge, et dans tout autre calibre. Car soient V, u les vitesses initiales de deux boulets, dont les poids sont P, p ; A, a les longueurs de l'ame de leurs pièces respectives ; B, b les longueurs des charges ; on a la proportion $V^2 : u^2 :: p B l^{\frac{A}{B}} : P b l^{\frac{a}{b}}$ suivant la théorie de Robins, chap. I, prop. VII ; & $V^2 : u^2 :: p B (A - B) : P b (a - b)$, suivant la note jointe à cette proposition. Tenons-nous-en à la seconde analogie qui, pour les raisons déduites dans cette note, est plus conforme à la nature des choses. Il en résulte que dans une même pièce de canon, c'est-à-dire lorsque $P = p$, & $A = a$, on a $V^2 : u^2 :: B (A - B) : b (A - b)$, d'où il est aisé de conclure la vitesse commu-

niquée à un boulet par une charge de poudre, quand on connoît celle que le même boulet reçoit d'une autre charge.

169. Quoique l'hypothèse de l'inflammation instantanée ne soit nullement admissible; cependant notre analogie peut très-bien être employée toutes les fois que les charges, dont on veut comparer les effets, ont une longueur moindre que le calibre de la piece, ou qui ne l'excede que très-peu. Telles sont dans la piece de 24, toutes les charges au-dessous de cinq livres de poudre; dans le 16, au-dessous de trois livres & demie; dans le 12, au-dessous de deux livres & demie; dans le 8, au-dessous de deux livres; & dans le calibre de 4, au-dessous d'une livre. Car on conçoit aisément que le feu, mis à un point de la circonférence de la base d'un cylindre équilatéral de poudre, ne mettra pas plus de temps à parcourir la longueur de ce cylindre que le diamètre de sa base, & que l'inflammation doit se communiquer en même temps à tous les points qui sont également éloignés de la lumière. Si donc une charge de poudre de forme équilatérale s'enflamme entièrement avant que le boulet soit sensiblement ébranlé, ce qui paroît très-vraisemblable, à plus forte raison en sera-t-il ainsi des charges dont la longueur est moindre que le diamètre de leur base; & cela suffit, sans qu'il soit nécessaire que l'inflammation soit instantanée, pour que l'analogie $V^2 : u^2 :: B(A-B) : b(A-b)$, donne des résultats exacts. La vérité de cette assertion est d'ailleurs pleinement confirmée par l'expérience.

170. Ce n'est plus la même chose, quand on emploie cette analogie pour comparer les vitesses résultantes des charges de poudre dont la longueur est plus grande que le

diametre de leur base, avec celles qu'impriment des charges moins longues que ce diametre : on trouveroit pour les fortes charges des vitesses trop grandes, si on les déduisoit des vitesses communiquées par des petites charges; ou bien celles-ci seroient trop petites si on les concluoit de la vitesse connue résultante d'une forte charge; les fortes charges ne produisant jamais, à cause de l'inflammation successive, tout l'effet dont elles sont capables à raison de leur quantité de poudre. C'est pourquoi aussi les formules par lesquelles on prétend déterminer la vitesse imprimée au boulet par une charge quelconque de poudre, ne peuvent satisfaire à tous les cas. Telles sont celles dont nous avons tiré les deux analogies ci-dessus : la premiere, déduite de la théorie de Robins, donne la vitesse initiale du boulet

$$V = \sqrt{\frac{60,4 h \cdot f b}{\frac{2}{3} n c}} \cdot \frac{a}{b} \text{ (voyez notre traduction des princ.}$$

d'art. de Robins, rem. I, de la prop. VII), & la seconde, tirée de la note à la suite de la même proposition, donne

$$\text{cette vitesse } V = \sqrt{\frac{60,4 h f b (a-b)}{\frac{2}{3} n c a}}. \text{ Dans chacune de}$$

ces formules la lettre h exprime la hauteur du barometre d'eau; la lettre f la force de la poudre, ou plutôt le rapport de sa force élastique à la pression de l'athmosphère; n , la densité de la matiere du mobile relativement à celle de l'eau; c , le diametre du boulet; b , la longueur de la charge de poudre; & a , la longueur de l'ame du canon. La premiere de ces formules est defectueuse, non-seulement dans le principe, comme nous l'avons fait voir dans la note citée, mais encore en ce qu'elle suppose à la poudre une force beaucoup moindre qu'elle n'est réellement. La seconde, quoiqu'exempte²¹ de ces défauts, a celui de ne pas être applicable à des charges de poudre plus longues

que le diamètre de leur base, parce qu'elle suppose l'inflammation complète de la charge, dans l'espace même qu'elle occupe au fond du canon.

171. M. Euler a imaginé un moyen pour lever une partie de ces difficultés, non en considérant la manière dont une charge de poudre s'enflamme successivement : circonstance qui échappe à l'observation & ne peut être soumise au calcul ; mais en supposant qu'au premier instant il s'enflamme une portion de la charge qui, avec la force que l'on connoît à la poudre, fasse le même effet que la charge entière par son inflammation successive, on sent bien que cette portion ne peut se déterminer qu'à *posteriori* & d'après des expériences bien constatées. Le calcul établi en conséquence de cette hypothèse, a conduit le savant commentateur de Robins à cette expression de la vitesse initiale du boulet, $V = \sqrt{\frac{60.4 \times 62199}{2 P + Q} \log \frac{52 i P - 123 Q}{123 Q}}$; dans laquelle P représente le poids du boulet ; Q la pesanteur de la charge de poudre ; *i* le nombre de diamètres du boulet, contenus dans la longueur de l'ame du canon ; & le signe *l* un logarithme hyperbolique (voyez dans l'ouvrage cité, la note 28) ; de sorte que, connoissant le rapport du poids de la charge à celui du boulet, & la longueur de l'ame exprimée en diamètres du boulet, il ne faut qu'un calcul assez simple pour avoir la vitesse initiale du boulet, quoique les résultats de cette formule ne s'écartent pas beaucoup de la vérité, le principe sur lequel elle est fondée, n'a point ce degré de certitude qui entraîne la conviction : l'on se persuadera difficilement que des portions semblables d'une grande & d'une petite charge, feroient, si elles s'enflammoient subitement, le même effet que font les charges entières en s'enflammant successive-

ment; la maniere dont la poudre agit, ne paroît pas pouvoir se concilier avec cette hypothese : aussi arrive-t-il que cette formule attribue trop de force aux petites charges, & pas assez aux grandes; & ce n'est que pour les charges moyennes qu'elle s'accorde avec l'expérience, selon la qualité de la poudre. Puisque tel est le sort des formules de cette espece, qu'il ne fauroit y en avoir d'assez générales pour satisfaire à tous les cas, nous ne voyons que l'expérience qui puisse y suppléer : ce guide nous conduira plus sûrement qu'aucune théorie de la poudre, à la connoissance des vitesses initiales résultantes des diverses charges qu'on emploie dans les pieces de canon des différens calibres,

172. Pour y parvenir, nous avons suivi la méthode décrite à l'article 69 de la 1^{re}. section, par laquelle on trouve l'angle de départ du boulet, celui que la premiere direction fait avec l'horizon. Cet angle, la distance du point de chute, et la différence de niveau entre ce point et la bouche du canon, sont les élémens, dont la connoissance donne infailliblement celle de la vitesse initiale du boulet. Il n'est donc question que d'appliquer la méthode aux boulets de tous les calibres chargés avec les différentes charges que l'on veut éprouver pour en connoître la force.

Les pieces que nous avons mises en expérience, sont les canons de sieges & de places, des cinq calibres de 24, 16, 12, 8 & 4; les canons de bataille des trois calibres de 12, 8 et 4, et les deux obusiers de 8 & 6 pouces.

Les charges éprouvées avec la piece de 24 sont celles de 12 onces, 1 livre, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, &c. jusqu'à 12 livres de poudre.

Avec la piete de 16, on a éprouvé les charges de 8 et 12 onces, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, &c. jusqu'à 8 livres.

Pour la piece de 12, celles de 8 & 12 onces, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, jusqu'à 4 livres.

La piece de 8, celles de 8 & 12 onces, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$ & 3 livres.

Avec la piece de 4, celles de 8 & 12 onces, 1 & $1\frac{1}{2}$ livres.

Avec les pieces de bataille, on a éprouvé la charge de 4 livres pour le 12; celle de $2\frac{1}{2}$ livres pour le 8, & de $1\frac{1}{2}$ livre pour le 4.

Pour les obusiers, on a éprouvé les charges de 12, 14, 16, 20, 24 & 28 onces.

Toutes ces charges, enfermées dans des gargouffes de papier, ont été pressées dans le fond de l'ame des pieces, sans être refoulées; le boulet placé immédiatement sur la charge, contenu par un bouchon de fourrage, & refoulé d'un seul coup. Les pieces ont toujours été dirigées horizontalement, & l'on a pris toutes les précautions pour observer la plus grande uniformité dans les procédés de ces épreuves, tant pour la pesée des charges, que pour la maniere de les placer dans le canon. Il eût seulement été à desirer que les boulets d'un même calibre eussent tous été de même poids; mais cela n'est point possible: il regne à cet égard une si grande diversité, qu'à peine sur trente boulets s'en trouve-t-il deux qui aient la même pesanteur; & la différence entre les poids de deux boulets de 24, va quelquefois jusqu'à une livre & demie. Quoi qu'il en soit, l'exactitude qu'on a voulu mettre dans ces épreuves, exigeoit que l'on pesât les boulets, soit pour choisir ceux qui ont le même poids, soit pour n'employer que des

boulets pesant à peu près également ; & c'est ce dernier parti que nous avons été obligés de prendre , sans même nous assujettir à tenir compte d'une différence de trois ou quatre onces aux boulets de 24, & ainsi à proportion pour ceux des autres calibres, parce qu'il n'en peut résulter qu'un 150^{me}. de différence dans les vitesses ; précision plus que suffisante pour la pratique du service de l'artillerie , que nous avons principalement en vue.

Voici un exemple de calcul , par lequel on trouve les vitesses-résultantes de nos épreuves : prenons celle du boulet de 24 chassé avec la charge de deux livres & demie de poudre. A cette épreuve , le canon étant dirigé horizontalement , le boulet a rencontré la règle BC (fig. 15), placée à 24 pieds du canon , en un point *g* , élevé de 2 pouces 8 lignes $\frac{1}{2}$ au-dessus de l'horizontale *mi* , ce qui donne l'angle de départ *gmi* , ou EBD (fig. 15*) ; il est ensuite tombé au point F , éloigné du canon de 131 toises 5 pieds ou 791 pieds , & plus bas que l'horizontale BD menée par la bouche du canon , de 5 pi. 3 po. 10 lign. ; de sorte que BE étant sa première direction , la verticale EF , qui exprime la quantité dont la pesanteur l'a abaissé pendant qu'il a parcouru la courbe BF , est composée de deux parties , dont l'une ED se trouve par l'angle connu EBD , & l'autre DF par le nivellement. On pourra donc calculer le temps de la chute par EF , ce qui donnera le temps du trajet par BF , qui est le même ; & enfin la vitesse initiale du boulet par la formule $V = \frac{c}{t} (m - 1)$. On se rappellera seulement que dans le triangle rectangle *mig* (fig. 15), on a $\text{tang. } gmi = \frac{gi}{mi}$ (§. 5) ; & que dans le triangle rectangle BDE (fig. 15*), on a $ED = BD$.

x tang. EBD. Cela posé, on trouvera la vitesse initiale par l'opération suivante.

Opération préparatoire.

$L. (2 \text{ po. } 8 \frac{1}{2} = 2,7083)$	0,4327021
$L. 24 \text{ pi.} = 288 \text{ po.} \dots$	2,4593925
$L. \text{ tang. EBD} \dots\dots$	7,9733096
$L. 791 \dots\dots\dots$	2,8981765
$L. ED \dots\dots\dots$	0,8714861
donc $ED =$	7,43851
ajoutez $DF =$	5,31944
on aura $EF =$	12,75795
$L. EF \dots\dots\dots$	1,1057810
ôtez $L. 15,1 \dots\dots\dots$	1,1789769
	9,9268041 dont la moitié
	9,9634020 est le log. du tems t .

Calcul de la vitesse, par la formule $V = \frac{c}{t} (m - 1)$.

$L. \frac{1}{c} \times 0,434394 \dots\dots$	5,8495323 (§. 133, tab. VI.)
$L. 791 \dots\dots\dots$	2,8981765
	8,7477088 dont le nombre
ou $L. m \dots\dots\dots$	0,0559382
donc $m =$	1,13746
$m - 1 =$	0,13746
$L. (m - 1) \dots\dots\dots$	9,1381763
$L. c \dots\dots\dots$	3,7882520 (§. 133, tab. VI.)
comp. $L. t \dots\dots\dots$	0,0365980
$L. V \dots\dots\dots$	2,9630263 = $L. 918,39$

La vitesse initiale du boulet de 24, chassé avec deux livres & demie de poudre, seroit donc de 918,39 pieds par seconde, si dans l'intervalle des 24 pieds du canon à la regle BC (fig. 15), la pesanteur ne l'abaissoit point sensiblement. Pour savoir ce qui en est, supposons que la vitesse que nous venons de trouver soit effectivement celle du boulet, ce qui ne peut faire qu'une erreur imperceptible; le temps employé à parcourir les 24 pieds, sera $\frac{24}{918,39}$ de seconde, pendant lequel la pesanteur abaisse le boulet de 1,485 lign. : de sorte que sa premiere direction, au lieu de rencontrer la regle BC à 32,5 lign. au-dessus de l'horizontale *mi*, passe à 33,985 lign. au-dessus du point *i*, & forme avec *mi* un angle dont le log. tang. est 7,9927136, ce qui donne 7,7784 pieds pour la valeur de ED (fig. 15 *), & 13,0984 pour celle de DF : donc le temps de la chute par EF, ou du trajet par BF, a maintenant pour logarithme 9,9691207 dont le complément étant ajouté à la somme des logarithmes de *m* - 1 & de *c*, auxquels il n'y a rien à changer, parce que ces quantités ne dépendent que du poids du mobile, de la distance BF, & de la résistance de l'air, on aura 2,9573076 pour le logarithme de la vitesse initiale, qui est par conséquent de 906,37 pieds. Cette correction diminue donc la premiere vitesse de 12 pieds, & ne doit pas être négligée.

Veut-on essayer une seconde correction? On trouvera, en suivant le même procédé, une vitesse de 906,06 pieds, moindre seulement d'environ 4 pouces que la précédente. On peut donc s'en tenir à la premiere correction, & conclure que la vitesse initiale du boulet de 24, résultante de deux livres & demie de poudre, est de 906 pieds par

seconde. Le même calcul appliqué aux autres charges & aux autres calibres, a donné les résultats rapportés dans la table suivante, dont la première colonne indique les charges qui ont été éprouvées. On voit dans la seconde colonne la position du point *g* (fig. 15), où le bas du boulet a rencontré la planchette BC, par rapport à l'horizontale *mi*; & l'on a marqué cette position par le signe —, lorsque le point de rencontre *g* s'est trouvé plus bas que le point *i*. Aux huit premières charges, avec la pièce de 24, la planchette BC étoit éloignée de 4 toises de la bouche du canon; mais la flamme de la charge de 4 livres l'ayant atteint à cette distance, il a fallu la placer à 8 toises où on l'a laissée pour la suite des épreuves. La troisième colonne renferme les angles de départ des boulets, ceux que leur première direction fait avec l'horizon. Les quatrième & cinquième colonnes indiquent la position du point de chute du boulet par rapport à la bouche du canon; la quatrième donne la quantité DF (fig. 15*) ou la différence de niveau que nous appellons distance verticale, & la cinquième la distance horizontale ou BD. La sixième & dernière colonne de cette table indique les vitesses initiales du boulet communiquées par chaque charge & résultantes des épreuves.

TABLE VII.

Des vitesses initiales résultantes de différentes charges.

CALIBRES des pièces.	Charges de poudre.	Rencontre de la planchette par le boulet.	Angles de départ.	Distances de la chute du boulet.		Vitesse initiales du boulet
				verticale.	horizont.	
24	liv.	li. pt.	' "	pi.	pi.	pi.
	" $\frac{3}{4}$	— 12 "	7 20	6,049	293	500
	1 "	16 2	19 56	6,059	415	575
	1 $\frac{1}{2}$	12 "	14 22	5,972	490	700
	2 "	— 16 10	14 56	6,236	422	809
	2 $\frac{1}{2}$	32 6	33 48	5,320	791	906
	3 "	14 "	15 10	5,479	704	989
	3 $\frac{1}{2}$	— 6 4	5 15	5,250	550	1065
	4 "	11 5	12 18	5,500	788	1132
	5 "	34 2	18 32	6,278	1014	1250
	6 "	33 6	18 3	6,778	1098	1320
	8 "	— 5 6	1 34	5,166	756 $\frac{1}{2}$	1425
	10 "	— 0 2	0 47	4,826	799	1475
	12 "	— 8 8	3 18	5,340	790	1530

16	liv.	li. pt.	' "	pi.	pi.	pi.
	" $\frac{1}{2}$	— 41 6	12 7	6,028	281 $\frac{1}{2}$	500
	" $\frac{3}{4}$	— 40 7	14 11	5,958	324	618
	1 "	— 6 3	1 28	6,486	449	704
	1 $\frac{1}{2}$	3 6	4 54	6,188	552	855
	2 "	— 19 4	7 18	6,031	537	992
	2 $\frac{1}{2}$	19 5	11 33	5,240	746	1110
	3 "	9 4	6 13	5,167	748	1221
	3 $\frac{1}{2}$	— 15 8	6 25	5,653	666	1312
	4 "	20 2	11 18	6,170	988	1374
	5 "	0 8	1 31	5,115	789 $\frac{1}{2}$	1415
	6 "	17 5	9 49	6,674	1047	1445
	8 "	— 5 8	1 47	5,153	788	1514

	liv.	li. pt.	' "	pi.	pi.	pi.
12 longue.	" $\frac{1}{4}$	— 36 "	11 17	5,181	293	571
	" $\frac{1}{2}$	— 4 2	1 40	5,271	446 $\frac{1}{4}$	775
	1 "	— 16 9	5 36	5,090	464	908
	1 $\frac{1}{2}$	— 20 8	8 14	4,951	502	1061
	2 "	26 5	14 50	5,010	816	1181
	2 $\frac{1}{2}$	4 3	3 33	4,896	726 $\frac{1}{2}$	1281
	3 "	6 4	4 25	4,358	748	1361
	4 "	2 4	2 12	4,601	814	1520

8 longue.	" $\frac{1}{4}$	— 2 "	3 39	6,038	435	698
	" $\frac{1}{2}$	— 17 11	5 45	6,200	480	850
	1 "	28 1	16 30	4,997	654	960
	1 $\frac{1}{2}$	— 18 11	7 43	6,667	642	1179
	2 "	— 7 6	2 23	5,500	702	1324
	2 $\frac{1}{2}$	— 4 3	0 56	4,896	725	1417
	3 "	— 11 7	4 39	5,250	714	1459

4 longue.	" $\frac{1}{4}$	— 39 5	16 57	6,000	437	924
	" $\frac{1}{2}$	— 34 3	15 11	5,373	482	1117
	1 "	— 32 4	14 39	5,847	560	1272
	1 $\frac{1}{2}$	— 30 11	14 21	4,733	555	1508

12 8 4 } courtes	4 "	— 14 "	5 50	4,900	671 $\frac{1}{2}$	1442
	2 $\frac{1}{2}$	— 10 "	6 7	4,198	788 $\frac{1}{2}$	1422
	1 $\frac{1}{2}$	— 35 11	16 45	4,552	503	1446

NOTA. En relisant cette table, je me suis aperçu d'une erreur dans la vitesse du boulet de 8 tiré avec la pièce longue de ce calibre : cette vitesse, qui devrait être plus grande qu'avec la pièce courte & la même charge, se trouve au contraire plus petite. Comme il n'est pas possible de revenir sur les procédés des épreuves qui ont donné cette vitesse, procédés dont l'exactitude doit d'ail-

Remarque I.

173. La première idée qui se présente à l'inspection de ces tables d'épreuves, c'est qu'il semble que ce soit en

leurs être à l'abri de tous soupçons, il ne me reste d'autre moyen pour découvrir la source de l'erreur, que d'avoir recours à une preuve encore existante de l'état des pièces employées à ces épreuves, & que je trouve dans le procès-verbal de la visite faite en 1782 de toutes les bouches à feu du polygone : j'y vois que dans la pièce de 8, l'*Engagiste*, fondue à Strasbourg en 1774, poids 2155 livres, n°. 9, l'ame étoit évasée de 3 à 4 points dans toute sa longueur. Or on verra ci-après par la table VIII du §. 176, que la pièce de 8 donnant dans cet état d'évasement de l'ame une vitesse de 1338 pieds, en a donné une de 1422 dans son état primitif; on peut donc conclure que l'*Engagiste* évasé de 4 points, ayant donné une vitesse de 1417 pieds, auroit dû en donner une de 1505, si cette pièce eût été éprouvée lorsqu'elle n'avoit qu'une ligne de vent. C'est donc dans le rapport de 1417 à 1505 qu'il faut augmenter les vitesses obtenues pour les autres charges avec la même pièce; & remplacer, pag. 116 de mes tables du tir des canons, la colonne qui a 125 toises en tête par celle-ci :

<i>Charges.</i>	<i>Vitesse.</i>
liv.	pi.
» $\frac{1}{2}$	742
» $\frac{3}{4}$	956
1 »	1111
1 $\frac{1}{2}$	1286
2 »	1408
2 $\frac{1}{2}$	1505
3 »	1552

A l'égard des vitesses résultantes des autres qualités de poudre,

pure perte que la théorie prescrit des règles pour la justesse du tir : à quoi sert en effet de connoître la vitesse initiale du boulet , & l'inclinaison qu'il faut donner à la pièce de canon pour tirer à une distance donnée , si , comme nos épreuves l'indiquent , le projectile ne suit presque jamais la direction du canon ; si entre cette direction & celle du départ du boulet il y a toujours un angle de quelques minutes ? Accident qui varie continuellement , qu'on ne peut ni prévoir , ni éviter , qu'on ne peut par conséquent soumettre au calcul , ni assujettir à aucune loi certaine pour y régler la pratique.

Avant de prononcer , voyons à quoi se réduit l'effet de cette différence entre l'angle du départ du boulet & celui de l'inclinaison de la pièce : il en peut sans doute résulter une augmentation ou diminution considérable dans la portée sur un terrain horizontal ; mais ce n'est point par les portées que l'on doit juger de l'effet de cette différence. Ce qu'il y a ici principalement à considérer , c'est le plus ou moins d'élévation du point où passe le boulet en vertu de l'angle de départ , relativement au point qu'il auroit dû frapper , ou par lequel il auroit dû passer , s'il eût suivi la direction de la pièce. Car il n'est pas question dans l'usage du canon de faire tomber les boulets à terre , mais de les faire arriver à un but d'une certaine hauteur & étendue ; dès que ce but est frappé , n'importe en quel point , l'objet est rempli. Si , par exemple , ce

on les trouvera par le principe que les vitesses données par les mêmes quantités de poudre , sont comme les racines quarrées des portées du mortier d'épreuve qui indiquent la qualité des poudres. Voyez le §. 56 , & l'instruction sur l'usage des tables , pag. 10.

but a une étendue de 8 pieds en hauteur , & que l'on pointe au milieu , le boulet l'atteindra quand même il donneroit quatre pieds plus haut , ou quatre pieds plus bas ; or une différence de quatre pieds est produite à 300 toises par un angle de $7' 38''$; à 200 toises par un angle de $11' 27''$, & à 150 toises par un angle de $15' 16''$. L'angle de départ du boulet peut donc différer de l'inclinaison de la pièce de $7' 38''$ à 300 toises ; de $11' 27''$ à 200 toises , & de $15' 16''$ à 150 toises , sans que ce boulet manque un but placé à ces distances & qui auroit huit pieds de hauteur , la ligne de mire étant dirigée au milieu.

Jettons maintenant un coup d'œil sur nos tables d'épreuves, nous verrons que la plus grande partie des angles de départ du boulet sont moindres que ceux que nous venons de calculer ; que sur quarante-sept coups , il y en a vingt-cinq dont l'angle de départ n'empêcheroit point le boulet de toucher un but de huit pieds de hauteur à 300 toises & au-delà ; cinq à 200 toises ; onze à 150 toises , & six qui en approcheroient beaucoup , à l'exception d'un seul tiré de la pièce de 24 avec la charge de $2 \frac{1}{2}$ livres , dont l'angle de départ a été de $33' 48''$. Il est vrai que cet angle a été trouvé beaucoup moindre à d'autres coups tirés avec la même charge ; comme il est très-possible qu'avec les autres charges on obtienne des angles de départ plus grands que ceux qui sont indiqués dans la table ; parce qu'à cet égard le vent du boulet , seule cause de cet accident , est une source de variétés continuelles : mais comme ces variétés ont lieu en plus & en moins , & à peu près autant dans un sens que dans l'autre , il y a toute apparence que la direction qu'il faut donner au canon

peut être regardée comme une moyenne entre toutes celles que prend le boulet, & que c'est en pointant sur le milieu de l'objet qu'on risque moins de le manquer. Concluons donc qu'en donnant au canon l'inclinaison prescrite par la théorie selon les circonstances, le tir sera plus juste, d'un effet plus constant, que si l'on cherchoit cette inclinaison par des voies incertaines & par un aveugle tâtonnement.

Remarque I I.

174. Nos formules indiquent la vitesse qu'un boulet doit avoir en sortant du canon pour atteindre un but donné, ainsi que la manière de diriger la pièce par le moyen de la hausse. D'un autre côté, l'on trouve dans nos tables d'épreuves la charge de poudre qu'il faut employer pour communiquer cette vitesse au boulet : il paroît donc qu'on a tout ce qu'il est nécessaire de connoître pour tirer avec justesse : la charge de poudre & la direction de la pièce. Il n'y auroit en effet plus rien à désirer à cet égard, si les poudres qu'on est dans le cas d'employer avoient toutes la même force, & égale à celle de la poudre qui a servi à nos épreuves ; si la même quantité de poudre communiquoit toujours la même quantité de mouvement : mais il s'en faut de beaucoup que l'on puisse compter sur une pareille uniformité : ce n'est pas que la poudre tirée d'un même baril, ou de différens barils provenant de la même fabrication, ne soit de la même qualité, & ne produise le même effet dans des tems semblables ; l'expérience ne laisse aucun doute à ce sujet ; mais elle nous apprend aussi que pour des poudres fournies par différentes fabriques, ou qui dans

la même fabrique sont faites en différens tems, il regne une très-grande variété constatée par les épreuves de réception. L'Ordonnance prescrit que les poudres seront essayées au mortier d'épreuve, & que pour être reçues dans les magasins du Gouvernement, une charge de trois onces portera le globe de soixante livres au-delà de 90 toises. Or depuis une quinzaine d'années ces épreuves ont donné des portées qui ont varié depuis 100 jusqu'à 120 toises; & en dernier lieu la fabrication des poudres s'est tellement perfectionnée, que la portée d'épreuve a été de 125 toises. C'est de cette dernière qualité qu'étoit celle qui a servi aux épreuves dont les résultats sont rapportés dans la table VII. S'il existe donc des poudres de différentes qualités, nos épreuves ne peuvent être vraiment utiles qu'autant que l'on aura un moyen d'en déduire la charge d'une autre espèce de poudre capable de communiquer au boulet une vitesse donnée. Par exemple, notre table indique que la charge de $2\frac{1}{2}$ livres imprime au boulet de 24 une vitesse initiale de 906 pieds par seconde, lorsque la poudre est de celle dont trois onces portent le globe du mortier d'épreuve à 125 toises; il s'agit de savoir quelle doit être la charge d'une autre espèce de poudre qui imprimeroit la même vitesse, sachant que trois onces de cette poudre donnent, avec le même mortier d'épreuve, une portée de 105 toises? Pour résoudre cette question, rappelons-nous ce qui a été dit à l'art. 57, que les vitesses communiquées à un projectile par la même charge de différentes espèces de poudre, sont proportionnelles aux racines quarrées des portées du mortier d'épreuve, & concluons que si avec une certaine charge la poudre de 105 toises donne une

Vitesse de 906 pieds au boulet de 24, celle de 125 toises avec la même charge doit lui en donner une d'environ 990 ; ces deux nombres étant entre eux dans le rapport de $\sqrt{105}$ à $\sqrt{125}$; mais pour avoir cette dernière vitesse avec l'espece de poudre qui a servi à nos épreuves, il faut, suivant la table, une charge de 3 livres : c'est donc aussi une charge de 3 livres qui imprimera une vitesse de 906 pieds avec de la poudre de 105 toises.

Voilà donc un moyen infallible de connoître la vitesse résultante d'une charge de poudre, quelle qu'en soit la qualité, lorsque cette qualité est connue soit par des épreuves faites dans cette vue, soit par les épreuves de réception. Il est vrai qu'on n'a pas toujours sous la main un mortier d'épreuve pour s'assurer de la force des poudres qu'on est dans le cas d'employer, & qu'une fois reçues dans les magasins, il ne reste plus aucun indice de l'épreuve qu'on leur a fait subir ; rien par conséquent qui puisse en faire reconnoître la qualité. Ce qui sembleroit être une nouvelle preuve que notre théorie n'est d'aucune utilité pour la pratique. Mais ne pourroit-on point marquer sur chaque baril de poudre la portée de l'épreuve, comme on y marque le lieu & l'année de la fabrication ? Cette formalité de plus ne souffriroit pas la moindre difficulté ; l'inspection d'un baril suffiroit alors pour faire connoître la qualité de la poudre qu'il renferme : ce seroit de la poudre de 100 toises, de 120 toises, &c. & notre théorie indiqueroit la charge qu'il faudroit employer de cette poudre pour remplir l'objet qu'on se propose. Si l'objet de l'Ordonnance est rempli, quand la poudre qu'on éprouve porte au-delà de 90 toises, (aujourd'hui, en 1793, au-delà de 100 toises) ; si le bien du service exige que l'indi-

cation de la portée d'épreuve soit conservée sur les barils; ce n'est point encore assez pour le succès du tir des armes à feu: il faut en outre que la connoissance de cette indication parvienne dans les batteries auxquelles la poudre est destinée, & qu'à cet effet il soit enjoint aux artificiers, chargés de préparer les cartouches, d'y mettre la marque du baril d'où les poudres sont tirées: seul moyen de connoître dans toutes les circonstances la qualité des poudres qu'on emploie, & de régler en conséquence la manière de pointer.

Et qu'on ne dise pas que la poudre étant sujette à de fréquentes altérations, toute indication de sa force primitive ne pourroit qu'induire en erreur sur sa force actuelle: l'expérience nous apprend par des faits bien constatés, que la poudre se conserve très-bien dans les magasins pendant une longue suite d'années; & qu'à moins de quelqu'accident extraordinaire, ou de négligence, qui ne doit point faire règle, on peut toujours compter sur la qualité annoncée par les épreuves de réception (*). Ceci paroît contredire ce que nous avons

(*) J'ai vu, en 1781, éprouver des poudres de la manufacture d'Arcier, qui avoient été reçues en 1772, & portoient le globe jusqu'à 127 toises. Dans le magasin du fort Nieulët à Calais, on trouva, en 1776, les poudres dans un état apparent de la plus mauvaise qualité: les chappes & les barils étoient tombés en javelles; une grande partie des poudres étoient en pains couverts de poussière; on égrena ces pains, on les passa au tamis, & les ayant soumis à l'épreuve, on obtint les mêmes portées qu'au temps de la réception. En 1772 on trouva à Strasbourg environ dix-huit milliers de poudre renfermés dans une ancienne tour de la ville, provenant de l'évacuation de Fribourg en 1744: malgré le mau-

dit ailleurs (note 8, page 107 de notre traduction de Robins) des variations infinies auxquelles la force de la poudre est sujette : mais la contradiction n'est qu'apparente ; dire qu'il existe des poudres de différentes qualités, démontrer l'impossibilité qu'une formule des vitesses satisfasse à tous les cas ; c'est prouver la nécessité de connoître par de bonnes épreuves la force de celle qu'on veut employer.

Remarque III.

175. Les vitesses déduites des épreuves rapportées dans la table précédente, ont été calculées d'après l'hypothèse que la force de la résistance qu'une sphere éprouve en traversant l'air avec une certaine vitesse, est équivalente au poids d'une colonne d'air de même diametre que la sphere, & d'une hauteur égale aux $\frac{2}{3}$ de celle dont le mobile devoit tomber pour acquérir cette vitesse. C'est peut-être un inconvénient attaché à la méthode que nous avons employée, qu'il faut connoître la résistance de l'air pour avoir la vitesse du projectile ; différente en cela de la méthode de Robins, qui donne cette vitesse indépendamment de toute hypothèse de résistance. Il arrive de là que le moindre doute sur la vérité de celle que nous

vais état des barils & des chappes, ces poudres donnerent au mortier d'épreuve des portées de 117 toises, & furent employées au service du polygone. Enfin, tout récemment, à la fin de 1792, des poudres restées dans le magasin du Saint-Esprit, ont été reconnues, quoique fabriquées en 1718, pour avoir une force de près de 120 toises.

avons adoptée, répand de l'incertitude sur les vitesses résultantes de nos épreuves; & ce doute n'est que trop bien justifié par toutes les difficultés dont la théorie de la résistance des fluides est encore hérissée. De toutes les expériences que nous savons avoir été faites sur la résistance de l'air, celles de M. le Ch^{er}, de Borda nous ont paru les plus propres à faire connoître la résistance que ce fluide oppose au mouvement d'une sphère: mais avant d'admettre la loi qui en résulte, nous avons cru devoir la soumettre à des épreuves qui en assurassent la certitude: il ne falloit pour cela qu'employer cette loi de résistance pour calculer la vitesse que le boulet reçoit dans l'épreuve d'une charge de poudre donnée; & voir ensuite si avec la même charge le boulet atteindra un but à une distance connue, la pièce étant dirigée suivant les principes que nous avons établis, & d'après la même hypothèse de résistance.

On trouve par exemple par la table des épreuves que la charge de 8 livres de poudre communie au boulet de 24 une vitesse initiale de 1425 pieds par seconde: voulant donc savoir comment il faut diriger la pièce pour que le boulet atteigne un but éloigné de 400 toises, en employant la même charge de 8 livres, mais d'une poudre de 120 toises, qui ne devoit par conséquent donner qu'une vitesse de 1396 pieds, nous avons trouvé par le calcul du §. 147 qu'il falloit une hausse de 5 lignes 9 points; & la pièce étant ainsi dirigée, le boulet donna à la hauteur du but. Vouloit-on déterminer la charge propre à tirer la pièce de 24 de but en blanc à la distance de 215 toises, la poudre étant de celle qui porte le globe du

mortier d'épreuve à 120 toises ? la formule du §. 144 nous apprend que , pour remplir cet objet , la vitesse initiale du boulet doit être d'environ 1034 pieds , & nos tables indiquent qu'avec de la poudre de 125 toises , il faut une charge de 3 liv. 5 onces ; mais comme il s'agissoit d'une poudre de 120 toises , il a fallu employer une charge de 3 liv. 8 onces (*), suivant ce qui a été dit dans la remarque précédente ; ayant donc pointé de but en blanc avec cette charge , le boulet frappa le but désigné. Enfin nous eûmes le même succès en tirant une piece de 16 avec 12 onces de poudre pour atteindre au but éloigné de 250 toises ; c'étoit de la poudre de 120 toises : notre théorie donnoit une hausse de 6 points 11 lignes ; & la piece inclinée en conséquence de cette hausse porta le boulet à sa destination.

Ces épreuves & beaucoup d'autres qui nous ont également bien réussi , ne laissent aucun doute sur la bonté de notre théorie , & sur les avantages que l'on peut retirer de son application à la pratique. On pourroit même se croire fondé à conclure que la loi de résistance que nous avons adoptée , est précisément celle qui s'observe dans la nature ; mais ce seroit se faire illusion : nous connoissons des théories dont les résultats sont aussi d'accord avec ceux de l'expérience , quoiqu'établies sur d'autres hypothèses de résistance. Cet accord n'est donc pas toujours une preuve qu'on ait rencontré la vraie loi , suivant laquelle l'air résiste au mouvement des projectiles ; il donne seulement à présumer que si

(*) Cette charge a été modifiée à cause d'une circonstance dont nous parlerons dans la remarque VIII.

l'on admet la même loi de résistance pour la recherche de la vitesse initiale du boulet, & dans l'usage que l'on fait ensuite de cette vitesse pour diriger le canon, la pratique pourra s'accorder avec la théorie (*), quand même cette loi ne seroit pas exactement celle de la nature : au lieu qu'en employant, pour connoître la vitesse, une méthode indépendante de toute hypothèse de résistance, comme est celle de Robins, cet accord ne sera possible qu'autant que la théorie sera fondée sur la vraie résistance de l'air. Notre méthode est donc préférable, & plus avantageuse pour la pratique, malgré l'incertitude où elle peut nous laisser sur la vitesse réelle des projectiles.

Remarque I V.

176. L'angle de départ du boulet par ses variations, & la poudre par ses différentes qualités, ne sont point les seules causes des irrégularités auxquelles le tir du canon est sujet : on s'apperoit aussi quelquefois qu'avec l'inclinaison relative à la vitesse initiale du boulet, les portées des pieces de canon n'ont point l'étendue que comportent la charge & la qualité de la poudre, en supposant même la plus grande différence observée entre l'angle de départ du boulet & l'inclinaison de la piece. C'est ce qui arrive à mesure que les pieces ont plus de service, & parti-

(*) Ayant calculé la portée de but en blanc d'une piece de 24 chargée de $2\frac{1}{2}$ livres de poudre, dans l'hypothèse de $n = \frac{3}{2}$ & dans celle de $n = \frac{4}{3}$, on la trouva dans les deux cas de 170 toises : dans le premier, avec la vitesse initiale de 906 pieds, & dans le second, avec celle de 927 pieds.

culièrement aux canons de bataille, dont le feu plus vif les dégrade plus promptement.

Ayant répété, en 1783, les épreuves faites deux ans auparavant, & qui sont rapportées dans la table VII, on trouva pour les boulets de 8 & de 4 des pieces de campagne une vitesse beaucoup moindre, & telle que la différence ne pouvoit être attribuée à la qualité de la poudre qui étoit de 120 toises de portée au mortier d'épreuve, tandis que celle employée en 1781 ne lui étoit supérieure que de 5 toises.

Voici le tableau comparatif des vitesses obtenues à ces deux époques.

Boulets	de 8	de 4
Charges de poudre	2 $\frac{1}{2}$ liv.	1 $\frac{1}{2}$ liv.
Vitesse en 1781	1422	1446
Vitesse en 1783	1190	1328
Vitesse, la poudre étant de 120 to.	1393	1416

Comme on n'avoit pas mis moins d'attention dans les procédés des dernières épreuves que pour celles de 1781, la cause de cette grande différence devenoit un mystère impénétrable : mais nous découvrîmes bientôt cette cause en nous rappelant la visite générale faite précédemment de toutes les bouches à feu au service de l'Ecole (*). Il en est résulté que dans la plupart des pieces visitées, le diamètre de l'ame étoit considérablement augmenté de-

(*) Cette visite ordonnée par le Général Duteil, alors Commandant de l'Ecole, avoit pour objet non-seulement de constater l'état des bouches à feu, mais encore d'instruire les Officiers de la manière d'employer les instrumens destinés à cet usage.

puis deux ans qu'on avoit fait une pareille visite. Ne cherchons point ailleurs, que dans cet évasement de l'ame des pieces, la cause de la diminution de vitesse observée aux dernieres épreuves. Le fluide qui s'échappe entre le boulet & les parois de l'ame, ne contribue en rien au mouvement progressif du boulet; il est en pure perte à cet égard; or il est clair qu'il s'en échappe d'autant plus que l'ame est plus évasée, ou que le vent du boulet est plus grand. Il n'est donc plus question que de pouvoir évaluer la déperdition de force occasionnée par une augmentation connue du calibre d'une piece de canon. M. Euler a trouvé pour cet effet une formule, dont l'application au cas présent peut répandre du jour sur cette matiere. Cette formule donne aussi la vitesse initiale qu'auroit le boulet, si son diamètre étoit égal au calibre de la piece, c'est-à-dire s'il n'y avoit point de vent; connoissant d'ailleurs sa vitesse dans le cas d'une différence connue entre ce diamètre & celui de l'ame du canon.

Soit u la vitesse du boulet lorsque ces deux diametres sont égaux; V la vitesse du boulet lorsque son diamètre est moindre que le calibre du canon de la quantité prescrite par l'Ordonnance, & tel qu'il étoit aux épreuves de 1781; & v cette vitesse lorsque le calibre de la piece est agrandi; nommant aussi m ce que l'excès du cercle du calibre sur le grand cercle du boulet est par rapport à celui-ci dans le second cas, & n dans le troisieme: voici les formules de M. Euler, pour exprimer le rapport entre les vitesses V , u & v . (Voyez notre Traduction de Robins, pag. 248.)

$$\frac{V}{u} = 1 - \frac{3,9506}{m} + \frac{2,9685}{m^2} + \frac{1,5865}{m^3}$$

$$\frac{v}{u} = 1 - \frac{3,9506}{n} + \frac{2,9685}{n^2} + \frac{1,5865}{n^3}.$$

Connoissant donc V , on aura les deux autres vitesses u & v . Ces formules appliquées aux trois pieces de bataille ont donné les résultats suivans, relativement aux différens vents que le boulet peut avoir dans ces pieces à mesure que leurs calibres deviennent plus grands. Les charges sont de 4 liv. pour le 12 ; de $2 \frac{1}{2}$ pour le 8 ; & de $1 \frac{1}{2}$ pour le 4.



TABLE VIII.

Des vitesses relatives à l'évasement des pièces.

Vent du boulet.	Evasement du calibre des pièces.	12		8		4	
		Poudre de		Poudre de		Poudre de	
		125 to.	120 to.	125 to.	120 to.	125 to.	120 to.
lig. pt.	pt.	pi.	pi.	pi.	pi.	pl.	pl.
0 0		1680	1646	1694	1660	1808	1772
1 0		1442	1413	1422	1394	1446	1416
1 1	1	1423	1395	1401	1373	1419	1390
1 2	2	1405	1376	1380	1352	1392	1363
1 3	3	1387	1359	1359	1332	1365	1337
1 4	4	1369	1341	1338	1311	1339	1312
1 5	5	1351	1324	1318	1292	1313	1286
1 6	6	1333	1306	1298	1272	1287	1261
1 7	7	1316	1289	1279	1253	1262	1236
1 8	8	1299	1273	1259	1234	1237	1212
1 9	9	1281	1255	1240	1215	1213	1188
1 10	10	1264	1239	1221	1196	1188	1164
1 11	11	1247	1222	1202	1178	1164	1140
2 »	12	1230	1205	1183	1160	1141	1117
2 1	13	1213	1189	1165	1141	1118	1095
2 2	14	1197	1173	1147	1122	1095	1073
2 3	15	1181	1158	1129	1106	1072	1051
2 4	16	1165	1142	1111	1088	1050	1029
2 5	17	1150	1126	1093	1071	1028	1008
2 6	18	1134	1111	1076	1054	1007	987

Nous n'avons point étendu cette table au delà d'un évasement de 18 points, parce qu'une pièce qui en auroit davantage seroit réputée hors de service. Voyons maintenant si nous y trouverons la cause de la diminution de vitesse observée dans nos épreuves.

La vitesse du boulet de 8 tiré d'une pièce de campagne

étoit , en 1781 , de 1422 pieds , avec une charge de $2\frac{1}{2}$ livres de poudre , & la poudre d'une qualité indiquée par 125 toises de portée. En 1783 , la charge étant la même , & la qualité de la poudre indiquée par 120 toises , la vitesse du boulet tiré de la même piece , a été trouvée de 1190 pieds. La table précédente fait voir que cette dernière vitesse , si elle ne provenoit que de l'augmentation de calibre , devroit être attribuée à un évasement de 11 à 12 points ; mais en ayant égard à la qualité de la poudre , elle provient d'un évasement de 10 à 11 points. Or suivant le procès-verbal de la visite des pieces , mentionnée ci-dessus , l'évasement moyen de la piece de 8 employée aux épreuves se trouve être de 7 à 8 points ; il y a donc une autre cause qui a dû concourir avec l'augmentation de calibre à la diminution de la vitesse. Cette cause , nous ne pouvons que la soupçonner , en supposant que le boulet employé aux dernières épreuves avoit un diamètre un peu moindre qu'aux premières , de manière à augmenter le vent de 3 à 4 points : en effet , l'on n'a pris d'autre précaution pour le choix des boulets que d'employer ceux qui passoient par la grande lunette sans passer dans la petite ; & comme les diamètres de ces lunettes diffèrent de 9 points , il est très-possible que la différence entre ceux des boulets ait été de 3 ou 4 points , & même davantage.

Il en est de même du boulet de 4 qui avoit une vitesse de 1446 pieds par les épreuves de 1781 , & une de 1328 par celles de 1783 : cette diminution , suivant nos tables , & ayant égard à la qualité de la poudre , indiqueroit un évasement de 3 à 4 points ; tandis qu'il résulte de la visite des pieces , que celle qui a servi aux épreuves en avoit un moyen de 9 points ; d'où l'on peut présumer qu'aux

dernières épreuves le boulet étoit de 5 à 6 points plus gros qu'aux premières. Ne pouvant donc rien assurer de certain sur la différence exacte de ces diamètres, ni par conséquent évaluer l'influence que le vent du boulet a pu avoir dans nos épreuves sur sa vitesse initiale, nous ne pousserons pas plus loin cet examen qui exige d'autres expériences, & nous terminerons cette remarque par quelques réflexions générales.

La nécessité de faire le diamètre de l'ame des pièces plus grand que celui du boulet, entraîne plusieurs inconvéniens préjudiciables soit aux pièces elles-mêmes, soit à la justesse & à l'uniformité du tir. Le boulet ayant la liberté, à cause du vent, de s'écarter de la direction de l'axe du canon, y étant même sollicité par les impulsions obliques qu'il reçoit pendant qu'il parcourt l'ame de la pièce ; il en résulte des chocs fréquens, des battemens contre les parois, qui refoulent le métal & altèrent les dimensions de l'ame : ces effets sont d'autant plus prompts qu'il s'excite une chaleur considérable dans la masse métallique, & que le fluide élastique de la poudre contribue aussi à les augmenter. C'est là une des principales causes de l'évasement que l'on observe dans l'ame des pièces après un certain temps de service. Il en est une autre qui seroit bien plus efficace, si l'on n'avoit soin de nettoyer les pièces toutes les fois qu'on s'en est servi : la crasse qui s'attache aux parois de l'ame des pièces à chaque coup que l'on tire ; cette matière humide, noire & fétide, n'est autre chose qu'un foie de soufre formé par la combinaison du soufre, qui entre dans la composition de la poudre, avec l'alkali fixe dégagé de l'acide nitreux dans la détonation du salpêtre & le soufre, dont les particules se réu-

nissent alors à l'aide du calorique , ayant une grande affinité avec cet alkali, s'en empare ; & leur union s'opere dans l'instant même que l'acide nitrique réduit en vapeur par l'inflammation , abandonne sa base alkaline. Or on fait que le foie de soufre est un puissant dissolvant des substances métalliques ; & quoique le métal du canon ne soit point dans un état de division propre à être facilement dissous , cela n'empêche point qu'il ne soit attaqué à sa surface par le foie de soufre , & qu'à la longue l'effet n'en devienne très-sensible , comme on peut le voir aux pieces de canon dont les parois intérieures sont égrenées , ou criblées d'une infinité de petites cavités dans tous les endroits où cette crasse a séjourné. Dans cet état le moindre frottement du boulet , la moindre action de la poudre enflammée enleve les petites éminences qui tapissent les parois de l'ame & en augmente le diametre. Il est donc très-important pour la conservation des pieces , qu'elles soient soigneusement nettoyées aussi-tôt qu'on s'en est servi : il seroit même à propos qu'elles fussent tamponnées pour en garantir l'intérieur des impressions de l'atmosphère , dont l'influence sur le cuivre & le fer est assez connue.

Quoi qu'il en soit des causes qui concourent à élargir l'ame des pieces , que nous venons de n'indiquer que très-sommairement , l'effet n'en sauroit être douteux ; de cet évafement s'ensuit nécessairement une diminution dans la vitesse du boulet : aussi voit-on aux exercices des écoles , qu'après deux ou trois campagnes , le degré de hausse , qui dans la nouveauté des pieces servoit à porter le boulet à une certaine distance , n'est plus suffisant pour donner la même portée : les tables des hausses qu'on s'empresse

de se procurer se trouvent en défaut & induisent communément en erreur ; on s'en prend à la poudre , qui peut bien avoir quelque part à ces irrégularités , mais le plus souvent elles proviennent du vent du boulet devenu trop considérable par l'évasement de l'âme du canon. Le moyen de remédier à cet inconvénient , & empêcher qu'il ne soit nuisible à la justesse du tir , seroit sans doute de prendre une connoissance exacte du calibre des pieces , de s'assurer même de la qualité de la poudre , & de régler en conséquence le degré de hausse qu'il convient d'employer pour la distance du but , ce qu'on trouve facilement par ce qui a été dit aux art. 148 , 149 , 174 , & en consultant la table VIII. Mais ce moyen , tout simple qu'il est , paroitra peut-être impraticable , & sera vraisemblablement relégué dans la classe des spéculations inutiles à la pratique du service ; n'étant point à présumer que dans la chaleur d'une action & parmi les embarras d'une batterie , on s'occupe des calculs que cette recherche peut exiger. Mais si ces calculs sont tout faits , s'il ne faut qu'un coup d'œil pour en connoître les résultats , les objections contre notre théorie perdront toute leur force. C'est à quoi sont destinées les tables du tir des canons & obusiers que nous avons calculées , & qui doivent faire suite à cet ouvrage. Au reste nous croyons avoir rempli le principal objet de cette remarque , qui est de faire connoître l'effet que l'évasement successif de l'âme des pieces produit sur la vitesse initiale du boulet , & la maniere d'y avoir égard (*).

(*) Une des principales causes de l'évasement des pieces & de leur prompt dépérissement , a sa source dans l'opération du forage

Remarque V.

177. Il se présente aussi quelques observations à faire sur les variations qu'une même charge de poudre éprouve dans ses effets, relativement aux diverses inclinaisons du canon. Lorsque l'ame d'une pièce est dirigée horizontalement, le boulet ne pèse point sur la poudre, qui n'a alors d'autre obstacle à vaincre pour le mettre en mouvement, que celui qui résulte de son inertie; la pesanteur n'opposant aucune résistance dans le sens horizontal. Si la pièce est inclinée au dessous de l'horizon, non-seulement le boulet ne pèse point sur la charge, mais il tend encore à se mouvoir indépendamment de l'action de la poudre & à descendre le long de l'ame du canon, comme sur un plan incliné, par la seule action de la pesanteur; de sorte que la vitesse communiquée par la poudre au boulet est augmentée de celle que lui imprime la pesanteur pendant qu'il parcourt l'ame de la pièce, & c'est la somme de ces deux vitesses qui forme alors la vitesse initiale avec laquelle le mobile est chassé hors du canon. Enfin, si la pièce est inclinée au dessus de l'horizon, le boulet pèse sur la charge & oppose une partie de son

combiné avec les imperfections de la fonte du métal. Le raisonnement vient à l'appui de l'expérience qui ne laisse aucun doute à cet égard; il y a long-temps que les bons artilleurs desireroient qu'on en revienne à la méthode de couler à noyau: le bien du service & l'économie y trouveroient également leur compte. Mais ce n'est point ici le lieu de s'étendre davantage sur cet objet important, auquel il est cependant essentiel que le Gouvernement donne une attention particulière.

poids à l'effort de la poudre : dans ce cas , la vitesse communiquée par la poudre est diminuée de celle qui résulte de la pesanteur : & il est évident que cette vitesse additive ou soustractive , selon que la piece incline au dessous ou au dessus de l'horizon augmente dans le rapport du sinus de l'inclinaison de la piece. Il suit de là que si la même charge exerce la même force dans chacun de ces trois cas , la vitesse initiale du boulet seroit plus grande au second qu'au premier & moindre au troisième. Mais cette différence ne mérite aucune considération , puisqu'elle ne va qu'à $\frac{1}{30}$ de pied pour une inclinaison de 10 degrés , & pour une vitesse qui seroit parcourir l'ame du canon en $\frac{1}{100}$ de seconde.

Il est une autre cause qui produit une différence bien plus considérable dans la vitesse du boulet : elle vient de ce que l'inflammation de la poudre n'est point instantanée ; que le fluide produit par cette inflammation ne se développe que successivement ; qu'il s'en développe d'autant plus d'une charge déterminée pour agir contre un obstacle ; que cet obstacle oppose une plus grande résistance ; qu'enfin une charge produit tout l'effet dont elle est capable dans un canon , lorsque son inflammation est complète dans l'espace même qu'elle occupe au fond de l'ame. Cela posé , il est aisé de concevoir l'influence de l'inclinaison d'une piece sur la vitesse du boulet , la charge étant la même : cette vitesse ne dépend point tant de la quantité de poudre qui compose la charge , que de celle du fluide élastique développé par l'inflammation avant que le boulet soit ébranlé ; car c'est dans l'expansion d'une certaine quantité de ce fluide que consiste toute la force de la poudre. De là nous allons découvrir un effet contraire de celui que nous

venons d'examiner : en effet, dans le cas d'une pièce inclinée au dessus de l'horizon, le boulet placé dans le canon comme sur un plan incliné pèse sur la charge de poudre d'une partie de son poids, & oppose par conséquent à l'expansion du fluide élastique une résistance plus grande & plus longue que par sa seule inertie dans le cas d'une direction horizontale ; il doit donc se développer une plus grande quantité de ce fluide avant le départ du boulet, & celui-ci recevoir une plus grande vitesse. C'est le contraire quand la pièce est inclinée au dessous de l'horizon. Mais il est à observer que cette différence n'est sensible qu'avec de fortes charges, avec celles qui ne s'enflamment point entièrement avant que le boulet soit ébranlé ; de sorte que pour le tir à ricochet, où l'on n'emploie que des charges de 8 à 12 ou 16 onces de poudre, dont l'inflammation doit être complète avant le départ du mobile, il n'est pas à présumer que l'inclinaison de la pièce puisse, par cette raison, augmenter ou diminuer la vitesse obtenue par un tir horizontal.

Concluons de ce que nous venons de dire, que les vitesses obtenues par nos épreuves étant le résultat d'un tir horizontal, il est essentiel pour la justesse du tir d'y faire quelque changement en plus ou en moins lorsque le tir est oblique. De savoir au juste à quoi se réduit ce changement, c'est sur quoi il n'est pas possible de prescrire de règle certaine, la loi que la poudre suit dans son inflammation n'étant point assez connue.

Concluons aussi qu'un projectile plus pesant doit recevoir de la même charge une quantité de mouvement plus considérable, qu'un autre mobile plus léger, lorsque la charge est suffisamment forte, puisqu'à raison d'une plus grande

masse il doit résister davantage & plus long-temps à l'expansion du fluide élastique. Le boulet de 24 & la bombe de 12 pouces nous en fournissent un exemple bien sensible : le premier reçoit d'une charge de 8 livres une vitesse de 1500 pieds par seconde, & l'autre de 3 livres 12 onces une vitesse de 400 pieds; c'est pour le boulet une quantité de mouvement de 24×1500 ou 36000, & pour la bombe une quantité de mouvement de 150×400 ou 60000; voilà donc une charge plus que double qui ne produit sur le boulet qu'un effet un peu plus que moitié de celui que l'autre produit sur la bombe; d'où peut provenir une aussi grande différence? Nous n'en voyons d'autre cause que la pesanteur de la bombe plus grande que celle du boulet, & l'inclinaison du mortier plus grande que celle du canon; ce qui occasionne nécessairement de la part de la bombe une résistance plus forte & de plus longue durée à l'expansion du fluide de la poudre, & fait qu'une moindre charge, en s'enflammant entièrement, produit plus d'effet qu'une charge plus forte qui ne s'enflamme qu'en partie avant le départ du projectile. Cette remarque peut servir à prévenir plusieurs erreurs qui se commettent dans la pratique, ou à expliquer au moins certains effets soit-disant irréguliers de la poudre.

Remarque V I.

178. Est-il avantageux ou nuisible de refouler le bouillon de fourage sur la charge & sur le boulet? Quoique cette question ait souvent été agitée, il paroît que les avis sont encore partagés, & que les voix prépondérantes sont pour les avantages de cette pratique. L'a-

sage est toujours de refouler six coups sur le bouchon qui recouvre la charge, & trois sur celui du boulet ; ceci ne regarde cependant que les pièces de siège, car pour celles de bataille on se contente de ne refouler qu'un seul coup, dans l'intention sans doute de sacrifier à la promptitude de l'exécution, ce que quelques coups de plus pourroient ajouter à la force du boulet. La diversité des opinions donnant lieu à des doutes concernant l'utilité du refoulement, nous avons cru devoir consulter l'expérience, en employant la méthode décrite à l'art. 68, comme plus propre qu'aucune autre à fixer les idées. Voici comment on s'y est pris pour faire ces épreuves : on a tiré six coups avec une pièce de 16 chargée de 6 livres de poudre, renfermée dans une gargouffe de papier & dirigée horizontalement, dont trois avec deux bouchons de fourage, l'un sur la charge refoulé de six coups, l'autre sur le boulet refoulé de trois coups. Aux trois autres coups la charge n'a été que pressée dans le fond de l'ame, le boulet immédiatement par-dessus & recouvert d'un bouchon qui a été refoulé d'un seul coup, voulant s'assurer seulement que la charge touchoit le fond de l'ame & que le boulet étoit contigu à la charge. Les résultats de ces épreuves sont indiqués dans la table suivante.

*Vitesse initiales du boulet de 16 chassé avec
6 livres de poudre.*

Ordre des coups en refoulant.		Ordre des coups sans refouler	
	pi.		pi.
1	1419	2	1445
3	1420	4	1451
5	1440	6	1438

D'où l'on voit qu'il est au moins inutile de refouler.

Ces épreuves viennent à l'appui du raisonnement; mais pour ne pas nous en tenir à notre opinion particulière sur un usage consacré par une longue suite d'années, nous allons transcrire ici une note qui se trouve dans les Mémoires de Saint-Remy, tome I, page 279, édition de 1745.

« Suivant des expériences faites à la Fere, le bouchon » dont on recouvre la charge & le boulet, ne contribue » en rien à augmenter la violence du coup, soit qu'il » ait été plus ou moins refoulé. Voici ce que porte sur » ce sujet un Mémoire particulier qui a été fait à l'oc- » casion de ces expériences.

» Quand on a introduit avec une lanterne la poudre » dans le canon, on ne peut se dispenser de se servir » d'un bouchon pour la rassembler, & il convient d'en » réduire le volume, afin de diminuer l'intervalle qui » est entre la poudre & le boulet; mais de croire, selon » l'opinion commune, qu'un bouchon plus gros qu'un » autre, refoulé avec plus de violence & par un plus » grand nombre de coups, contribue à chasser le boulet » plus loin, c'est un préjugé dont on se défabuse pour » peu qu'on y fasse attention.

» Si en refoulant davantage un bouchon, il pouvoit » acquérir la dureté d'un corps solide & une forte adhé- » sion aux parois de l'ame de la piece, comme cela arrive » aux balles des carabines, ou aux tampons chassés avec » force, pour les pétards pratiqués dans le roc, il est » constant que la difficulté que la poudre qui s'enflamme » au commencement, rencontreroit à chasser le boulet, » donnant lieu à une inflammation plus complète, il

» en recevrait une plus grande impulsion : mais l'on doit
» avoir de ces deux objets un sentiment bien différent :
» car comme le fourage est composé de parties flexibles
» & détachées , qui n'ont aucune adhésion avec les pa-
» rois de la piece , quelle résistance peut-il opposer à la
» violence de la poudre ? & peut-on tenir compte d'un
» frottement aussi insensible ? Que si l'on se sert d'un
» gros bouchon plutôt que d'un moyen , & même de
» plusieurs refoulés nombre de fois les uns après les
» autres , l'adhésion n'en sera pas plus forte , par consé-
» quent elle n'offrira pas une plus grande résistance : au
» contraire la poudre enflammée qui pénétrera le fou-
» rage , trouvera plus d'espace pour se dilater , & son
» impression sur le boulet ne pouvant se faire que suc-
» cessivement d'un bouchon à l'autre , cette impression
» ne sera pas à beaucoup près si forte que si elle étoit
» immédiate. A quoi l'on peut ajouter qu'un gros bouchon
» ou plusieurs rapprochant davantage le boulet de la
» bouche du canon , il lui reste moins de longueur à
» parcourir , par conséquent moins de temps pour rece-
» voir l'impulsion de l'inflammation totale de la poudre ;
» & c'est ce qui a été expérimenté plusieurs fois d'une
» manière qui ne laisse rien à désirer.

» A l'égard de la poudre , lorsqu'elle est réunie dans
» le plus petit volume qu'elle peut occuper naturellement ,
» il ne faut pas penser qu'en la refoulant pour la réduire
» dans un plus petit espace , elle en acquiert plus d'ac-
» tivité , puisque ce n'est qu'autant qu'il y a des interstices
» sensibles entre ses grains que le feu de celle qui s'en-
» flammera la première , peut s'introduire pour allumer le
» reste. Ce qui est si vrai , que quand elle est battue &

» réduite en pulverain dans une arme à feu , elle ne
» s'allume que successivement ; ainsi l'on peut conclure
» que le seul avantage que l'on tire du bouchon posé
» sur la poudre , est seulement de la rassembler dans le
» fond de la chambre , & d'empêcher , quand elle est
» enflammée , qu'elle ne se dilate autour du vent du
» boulet.

» Quant au bouchon qu'on met sur le boulet , comme
» il ne peut , non plus que le précédent , en retarder la
» sortie pour donner lieu à une plus grande inflamma-
» tion , l'on voit qu'il est absolument inutile , excepté dans
» le cas où l'on est obligé de soutenir le boulet pour
» tirer horizontalement , ou de haut en bas , alors peu
» importe qu'il soit refoulé ou non.

» Il suit des réflexions qu'on vient de voir qu'en
» employant des gargousses & le boulet immédiatement
» dessus , se contentant s'il le faut , de le soutenir par
» un bouchon introduit tout naturellement , le service
» du canon en sera plus vif , plus prompt & moins dan-
» gereux , parce que les canoniers ne s'arrêtant point à
» des manœuvres inutiles , ne seront que peu de temps
» exposés devant l'embrasure. »

Nous regrettons qu'on n'ait pas fait connoître l'auteur de ce Mémoire , pour lui payer le tribut d'éloges qu'il mérite par la manière solide dont il combat la pratique du refoulement. Tâchons de porter le dernier coup à cette pratique , en observant que si le refoulement produisoit quelque effet , fût-il même avantageux au tir , dût-il augmenter la force de la poudre , ce seroit une raison de plus pour en proscrire l'usage. Cette assertion ne peut être un paradoxe pour quiconque voudra faire attention

que l'objet que l'on doit avoir principalement en vue dans le tir des bouches à feu, est moins la justesse & la force d'un coup isolé, que l'uniformité dans les résultats de plusieurs coups tirés de suite : or en refoulant la charge & le boulet un certain nombre de fois, on ne doit point s'attendre que ce sera toujours avec la même force ; dès-lors pour peu que l'on suppose d'efficacité au refoulement, il ne faut plus compter sur l'uniformité : en refoulant plus ou moins fort, le boulet partiroit nécessairement avec plus ou moins de vitesse. Il seroit donc bien plus avantageux, la poudre étant renfermée dans une gargousse de papier, de pousser la charge au fond de l'ame, de ne l'y comprimer qu'autant qu'il est nécessaire pour s'assurer qu'elle est au fond, & de mettre le boulet immédiatement sur la charge, avec un bouchon pardeffus refoulé d'un seul coup. Par cette méthode plus simple, plus expéditive, & sur-tout moins sujette aux variations, on ne peut manquer d'approcher de cette uniformité si désirée dans le tir du canon, à laquelle on ne doit point hésiter de sacrifier un surcroît de force, qu'il seroit d'ailleurs facile de se procurer à coup sûr en augmentant la charge.

Remarque V I I.

179. Il nous reste à examiner si les variations dans la densité de l'air, résultantes des différentes températures de l'atmosphère, ont une influence sensible sur le tir du canon. C'est dans son état moyen que nous avons considéré l'air, près de la surface de la terre, & dans une saison tempérée, lorsque nous avons supposé qu'il étoit

850 fois moins pesant que l'eau ; mais il s'en faut de beaucoup qu'il conserve toujours ce degré de densité : la chaleur le raréfie, le froid le condense, & , à ne considérer que le plus grand froid naturel & la plus grande chaleur naturelle, les variations que ces deux causes produisent dans la densité de l'air ne laissent pas d'être assez étendues. Tâchons d'en découvrir les limites.

Muffchenbroeck renferme ces limites entre 606 & 1000, intervalle, selon nous, beaucoup trop grand : car dans nos climats la différence du plus grand froid à la plus grande chaleur est moindre que celle du degré tempéré à la chaleur de l'eau bouillante ; or de l'un à l'autre de ces deux termes le volume de l'air n'augmente que d'un tiers ; donc quand même les deux différences dont on vient de parler seroient égales, en prenant $\frac{1}{135}$ pour la densité moyenne de l'air, relativement à celle de l'eau, $\frac{1}{709}$ exprimerait sa densité pendant les plus grands froids, & $\frac{1}{991}$ pendant les plus grandes chaleurs. Nous pouvons donc rapprocher ces limites.

M. de Mairan admet pour celles du plus grand froid & du plus grand chaud dans nos climats, les nombres 994 & 1026, qui correspondent au degré 6 au dessous du terme de la congélation du thermomètre de Réaumur, & au degré 26 au dessus du même terme ; ensorte que si les degrés de raréfaction de l'air étoient proportionnels à ceux de la liqueur du thermomètre, & que 850 exprimât le volume de l'air correspondant au tempéré, ou au nombre 1010, on trouveroit 864 pour son volume pendant les plus grandes chaleurs, & 837 pendant les plus grands froids. Mais l'air se dilate & se condense plus que l'esprit-de-vin par les mêmes degrés de chaleur ; puisque

du tempéré à la chaleur de l'eau bouillante le volume de l'esprit-de-vin n'augmente que d'environ $\frac{1}{4}$, tandis que dans le même intervalle le volume de l'air augmente d'un tiers ; il faut donc prendre des nombres plus éloignés de 850 que ceux que nous venons de trouver pour exprimer la densité de l'air dans les cas extrêmes de sa température : on peut s'en tenir aux nombres 785, & 915 résultans de l'hypothèse que les degrés de chaleur sont proportionnels aux degrés du thermomètre ; cette hypothèse donne peut-être trop d'extension aux variations que la densité de l'air éprouve par le chaud & le froid, mais il n'y a point d'inconvénient à être un peu plus au delà qu'en deçà des véritables limites.

Supposant donc l'air 915 fois moins dense que l'eau pendant les chaleurs de l'été, & 785 fois pendant les froids de l'hiver, on aura, dans le premier cas, pour le boulet de 24, $\log. D = 3,8166977$, & dans le second $\log. D = 3,7501465$; ce qui donne $\log. c = 3,8202542$ pour la moindre densité de l'air, & $\log. c = 3,7537028$ pour la plus grande. Si l'on cherche ensuite quelle est, avec ces valeurs de c , la portée du but en blanc naturel de la pièce de 24, la vitesse initiale du boulet étant de 1420 pieds par seconde, on trouvera, §. 150, que par la seule cause de la densité de l'air, toutes choses d'ailleurs étant égales, cette portée seroit de 365,2 toises pendant les plus grandes chaleurs, & de 353,4 pendant les plus grands froids de nos climats : c'est environ six toises de plus ou de moins que dans le tempéré où la densité de l'air est 850 fois moindre que celle de l'eau. Cette différence, qui est très-peu de chose dans la pratique, disparoit entièrement lorsqu'on calcule la hausse ou l'angle

de mire qu'il faut employer pour tirer à ces distances ; on trouve que la maniere de pointer est exactement la même ; d'où l'on peut conclure qu'il n'y a aucune utilité à retirer pour le tir du canon de l'observation du thermometre ; d'autant plus que ce n'est guere dans les températures extrêmes qu'on seroit dans le cas de consulter cet instrument pour le service d'une batterie.

Le barometre peut aussi indiquer quelques variations dans la densité de l'air : car il n'est pas douteux que d'une plus grande pesanteur de l'atmosphère, doit résulter une plus grande pression sur les couches inférieures & par conséquent une plus grande densité ; mais les variations produites par cette cause sont renfermées dans des limites beaucoup plus rapprochées que celles qui proviennent des divers degrés de chaleur. En effet, que le barometre varie de 26 pouces 6 lignes à 28 pouces 4 lignes, & qu'à sa hauteur moyenne la densité de l'air soit exprimée par 850, elle le sera par 821,6, à la plus grande élévation du mercure, & à la moindre par 878,4. Ce que nous avons conclu du thermometre peut donc à plus forte raison s'appliquer au barometre : c'est-à-dire que les variations de cet instrument n'ont point d'influence sensible sur le tir du canon, par les indications qu'il donne de la densité de l'air. On peut d'autant mieux se dispenser d'avoir égard à ces indications, ainsi qu'à celles du thermometre, que l'air, en augmentant de densité, occasionne aussi dans la poudre une explosion plus vigoureuse & lui donne plus d'activité ; de sorte que si d'une part l'air oppose plus de résistance, il arrive en même temps que le mobile reçoit plus de vitesse & plus de force pour vaincre cette résistance.

La pesanteur de l'air n'est point la seule cause des variations du barometre, elles dépendent aussi des différens degrés d'élasticité dont ce fluide est susceptible : car si dans la couche inférieure de l'atmosphère, toujours comprimée par le poids des couches supérieures, il se répand un certain degré de chaleur, elle augmentera la force élastique de l'air dans cette couche, & sa pression contre les corps environnans, laquelle, agissant sur le mercure du barometre, le fera nécessairement monter. Mais quelle est l'influence du ressort de l'air sur la résistance que ce fluide oppose au mouvement des projectiles ? C'est, selon ce que nous avons dit ailleurs, §. 110, d'en diminuer la force ; parce que l'équilibre rompu par le choc du mobile contre les particules du fluide, est d'autant plus promptement rétabli qu'il est plus élastique, que ces particules s'accumulent moins au devant & refluent plus facilement vers les côtés du mobile ; ainsi le barometre, en indiquant un air plus dense, peut aussi annoncer un air plus élastique ; c'est-à-dire, d'une part, une plus grande résistance, de l'autre, une moindre, ce qui confirme l'inutilité des observations de cet instrument pour le tir du canon.

Nous ne parlerons point ici de la dilatation de l'air dans les couches supérieures de l'atmosphère ; on sait que l'air devient plus rare à mesure qu'il est plus élevé au dessus du niveau de la mer : mais il importe peu pour notre objet de considérer cette circonstance ; parce que le tir du canon s'exécute toujours suivant des directions qui ne permettent point au boulet de traverser des couches d'air dont les différentes densités pourroient sensiblement changer la résistance. Nous reprendrons ce sujet lorsqu'il sera question de la projection des bombes.

Les boulets du même calibre n'ayant pas tous le même poids, la valeur de la lettre D , qui dans nos formules représente le rapport de la pesanteur spécifique ou densité de l'air à celle du projectile, peut varier, l'air restant dans le même état, par la seule cause de la diversité du poids des boulets. La valeur attribuée à ce rapport dans la table VI, §. 133, est relative au poids moyen résultant d'une pesée faite sur un grand nombre de boulets de chaque calibre: ce poids moyen pour les boulets de 24 a été trouvé de 24,529 livres, les poids extrêmes étant de 24 & de 25 livres. Si le boulet pèse 24 livres, on a $D = 5959,74$ en supposant le diamètre de 0,4537 pieds, & $\log. c = 3,7787834$; si le poids est de 25 livres, on trouve avec le même diamètre $D = 6208,06$ & $\log. c = 3,7965122$; ce qui ne donne encore qu'une différence presque insensible pour les hausses à employer dans ces deux cas extrêmes de la pesanteur des boulets.

S'il arrivoit que la plus grande pesanteur du boulet concourût avec le plus grand diamètre, qui est aussi sujet à varier: si par exemple on attribuoit au boulet de 24 le poids de 25 livres & un diamètre de 5 pouces 6 lignes 1 point, ou 0,4589 pieds, qui est le plus grand qu'il puisse avoir, puisque les boulets de ce calibre doivent, pour être admis, avoir passé librement dans une lunette dont le diamètre est de 5 pouces 6 lignes $1 \frac{1}{2}$ points, on trouvera $D = 5999,4$ & $\log. c = 3,7866136$, d'où il ne peut encore résulter qu'un foible changement dans hausse; & cette différence ne seroit guere plus sensible en faisant concourir les deux dernières circonstances avec la plus grande densité de l'air.

On voit donc que dans les bornes où sont renfermés

les poids & les diamètres des boulets , ainsi que les différentes densités de l'air occasionnées par le chaud , le froid & la pression de l'atmosphère , ces causes prises ensemble ou séparément , ne peuvent avoir une influence bien marquée sur la manière de pointer une pièce de canon , c'est-à-dire sur la hausse relative à une charge & une distance données. Ce n'est pas que ces mêmes causes ne puissent produire des différences considérables dans les portées ; mais qu'on ne s'y trompe point , un boulet peut aller plus ou moins loin , il peut tomber à terre à une distance plus ou moins grande , sans que pour cela il manque un but situé en deçà du point de chute , quand même ce but n'auroit que quatre à cinq pieds de hauteur : il est , par exemple , tel degré de vitesse qui , portant le boulet de 24 à 400 toises avec une certaine hausse , le porteroit à 410 toises en donnant une ligne de plus à la hausse : cependant les deux courbes décrites en vertu de ces deux degrés de hausses ne seroient écartées l'une de l'autre , dans le sens vertical , que d'un pied à 235 toises du canon , & d'un pied & demi à 350 ; de manière qu'un boulet qui parcourroit l'une ou l'autre de ces courbes , pourroit également atteindre un but situé dans cet intervalle , & qui auroit quatre à cinq pieds de hauteur. Or le changement dans la hausse , qu'occasionneroit la considération des causes mentionnées ci-dessus , ne va pas à une ligne de plus ou de moins à la distance de 350 toises ; ce seroit donc mal à propos que l'on voudroit citer ces causes pour expliquer certains écarts du boulet , pour rendre raison , par exemple , de ce qu'à 2 ou 300 toises un boulet a donné 8 ou 10 pieds trop haut ou trop bas : une pareille irrégularité ne peut venir ni de la pesanteur

du boulet, ni de son volume, ni de la densité de l'air; au moins quant à l'influence de ces causes sur la résistance que le mobile rencontre dans l'air; & en supposant qu'elles ne produisent aucun effet sur la vitesse initiale du boulet. Mais à ce dernier égard il arrive souvent des changemens qui ne sont point à négliger; il peut se faire que le boulet, pour être plus pesant, reçoive de la même charge une plus grande vitesse initiale; & cette vitesse est toujours plus considérable lorsque le diamètre du boulet est augmenté, ou, ce qui revient au même, lorsque le vent du boulet est diminué. Les effets de ces deux causes ayant été suffisamment examinés dans les remarques IV & V, nous y renvoyons pour savoir ce qu'il y a à faire dans les circonstances qui les font naître.

Remarque VIII.

180. La pratique du tir du canon présente un effet qui n'avoit point encore été observé, & que l'usage de nos formules a seul pu faire découvrir. Lorsqu'on tire dans une batterie à embrasures ou à barbette, le boulet donne toujours plus haut qu'il n'est indiqué par la théorie. Ce fait ainsi isolé étoit bien propre à donner des soupçons contre la bonté de la théorie que nous avons adoptée: on pouvoit dès-lors conclure qu'elle s'écartoit trop de la rigueur géométrique, & qu'il en résulteroit des vitesses initiales trop grandes. Mais nous avons vu d'un autre côté que quand on tire en rase campagne sans épaulement, comme cela se pratique pour les pièces de bataille, & que nous l'avons quelquefois éprouvé avec des pièces

de siege , les résultats de l'expérience s'accordent mieux avec ceux de la théorie.

Il y a donc une cause qui , pour produire cette différence dans les effets , tient à la position du canon placé dans une embrasure , sur une barbette , ou servi sans aucun épaulement. Cette cause , nous la trouvons dans le résultat d'une discussion que nous avons eu occasion de faire autrefois sur le recul des armes à feu , & principalement dans un mémoire composé en 1767 par M. Brackenholffer , professeur de l'école de Strasbourg : ce mémoire , dont on ne peut trop recommander la lecture , présente , quoique sous le titre modeste de simple opinion , une explication très-satisfaisante du recul : il y est dit , « qu'il se forme » au moment de l'explosion une espèce de secteur sphérique de feu devant la bouche du canon , dont l'extrémité s'appuie sur le fond de l'ame , & dont toute la partie extérieure à la pièce se termine dans l'air que ce secteur comprime & chasse en tous sens..... » Ainsi ce secteur , que l'auteur appelle *secteur d'explosion* , trouvant un appui dans l'air , agit de toute sa force sur le fond de l'ame , & cause le recul de la pièce. »

Cette théorie est confirmée par l'observation d'un ancien auteur allemand , Joseph-Sigismond Buchner , qui , dans un ouvrage intitulé : *Theoria & praxis artilleriæ* , imprimé à Nuremberg en 1682 , dit avoir remarqué qu'une pièce étant tirée dans une embrasure de façon que la bouche du canon soit plus près de l'une des joues que de l'autre , le boulet prend une déviation dans le sens opposé à la joue qui a reçu la plus forte impression. Cette observation ne laisse aucun doute sur l'existence du secteur d'explosion , lequel , comprimé contre la joue

de l'embrasure la plus voisine du canon , réagit & entraîne le boulet qui s'en trouve encore enveloppé. Mais si, de ce que le canon est plus près de l'une des joues que de l'autre, il résulte au boulet une déviation latérale, pourquoi n'en résulteroit-il pas une dans le sens vertical, lorsque la bouche du canon est très-près du fond de l'embrasure, ou du dessus d'un épaulement à barbette? C'est la même cause, ce doit être le même effet, & il ne faut point chercher ailleurs celle du phénomène qui fait le sujet de cette remarque: on est d'autant plus fondé à l'attribuer à cette cause, que quand il n'y a point d'épaulement, quand le secteur d'explosion a la liberté de s'étendre en tous sens, l'expérience ne dément point la théorie.

Il suit de là, que dans une batterie à épaulement il y a nécessairement un changement à faire ou à la charge de poudre, ou à la manière de pointer indiquées par nos tables du tir des canons & obusiers: il faut diminuer la charge si on ne change rien à la manière de pointer; ou bien il faut pointer un peu plus bas si on veut tirer avec la même charge. On ne peut assujettir ces changemens à aucune règle fixe, parce qu'ils dépendent d'un trop grand nombre de circonstances, telles que la charge & la qualité de la poudre, la distance du but, le plus ou moins d'intervalle entre le canon & le fond de l'embrasure; nous savons seulement qu'à la distance de 215 toises, nos tables ayant indiqué qu'avec la pièce de 24 il falloit une charge de 4 livres 5 onces pour pointer de but en blanc; le boulet avoit donné de 2 à 3 pieds trop haut; c'étoit de la poudre de 100 toises au mortier d'épreuve: pour corriger cet effet du secteur d'explosion,

il a fallu diminuer la charge d'environ un vingtième, & pointer de but en blanc, ou bien en conservant la charge de 4 liv. 5 onc. viser de deux à trois pieds plus bas. Sur quoi nous observerons qu'en pointant plus bas il est très-possible que le boulet se relève davantage, on baisse alors la piece, on la rapproche du fond de l'embrasure, ce qui, à raison d'une plus forte compression, doit donner plus d'activité à la réaction du fluide élastique qui forme le secteur d'explosion; & l'en doit être bien étonné, quand cette cause n'est point connue, de voir qu'en baissant la piece le boulet donne plus haut. Il y a donc moins d'incertitude à diminuer la charge qu'à pointer plus bas: mais on doit convenir aussi que l'une & l'autre correction ne fera jamais qu'une affaire de tâtonnement, cependant tellement circonscrite, qu'il n'en peut résulter que peu d'inconvéniens dans la pratique.

C'est peut-être une erreur d'avoir dit au commencement de cette remarque, que l'effet en question n'avoit point encore été observé: nous nous rappelons qu'ayant représenté à des canoniers des anciens bataillons de royal-artillerie qu'ils pointoient trop bas, leur réponse étoit ordinairement que le boulet relève: ne soupçonnant alors aucune cause qui pût contrarier l'action de la pesanteur, nous regardions le propos du canonier comme un préjugé sans fondement, ou qui n'en pouvoit avoir d'autre que de rapporter le mouvement du boulet à la ligne de mire au dessus de laquelle il exécute effectivement une grande partie de sa course, quoique s'abaissant continuellement au dessous de l'axe du canon; nous imaginions que jugeant la direction de la ligne de mire, & voyant le boulet franchir cette direction, le canonier en tiroit la

fausse conséquence que le boulet se relevoit ; mais l'existence & les effets du secteur d'explosion ne laissent plus aucun doute que l'observation de nos anciens canoniers n'étoit point une illusion ; & c'est l'usage des formules déduites de notre théorie qui a rectifié notre jugement à cet égard ; en même temps qu'elles nous confirment dans l'opinion que cette même théorie est suffisamment exacte pour la pratique.

Du tir du fusil.

181. Le tir du fusil est soumis aux mêmes loix , & s'exécute d'après les mêmes principes que le tir du canon. Ainsi que le canon, le fusil a son but en blanc, qu'il est nécessaire de connoître pour bien ajuster le coup. C'est dans cette connoissance acquise par un long usage que consiste communément toute l'adresse du chasseur. Sans avoir examiné les dimensions qui déterminent sur son fusil la position de la ligne de mire ; sans avoir calculé la vitesse que la poudre imprime à la balle , l'expérience lui apprend à quelle distance il peut frapper un objet situé au but en blanc, soit naturel, soit artificiel ; un coup d'œil exercé lui fait juger cette distance , & dès-lors le fusil qu'il possède est, par cette seule raison , le meilleur de tous les fusils.

Notre dessein n'est point de parler de toutes les especes d'armes à feu connues sous les noms de mousquet , mousqueton , carabine , arquebuse , pistolet , &c. Nous nous bornerons à quelques observations sur le fusil destiné au service de l'infanterie , dont les dimensions ont été fixées par un règlement donné en 1777 , & sur celui dont on

vient tout récemment (en 1784) d'armer la troupe du corps de l'artillerie. S'il n'étoit question que du manie-
ment du fusil , de la maniere de s'en servir , même des
principes sur lesquels peuvent être fondées la justesse &
la direction de la visée , nous ne pourrions mieux faire
que de renvoyer à l'Essai général de Tactique de M. le
Comte de Guibert , où cette matiere est traitée de la
maniere la plus satisfaisante au chapitre IV de la premiere
partie. En militaire éclairé , l'auteur soumet la pratique
du tir des fusils à une théorie lumineuse , & met dans
tout son jour la nécessité d'exercer le soldat à cette partie
importante & trop négligée du service. Mais comme il
entre dans le plan de notre ouvrage de donner plus de
développement à cette théorie , nous ajouterons ce qui
pourra servir à en confirmer ou rectifier les résultats , en
appliquant au fusil nos formules du mouvement des
projectiles.

Dimensions du fusil.

182. Les dimensions qu'il importe sur-tout de con-
noître sont , 1°. la distance des deux points qui donnent
la position de la ligne de mire sur la surface extérieure
du fusil , & déterminent son inclinaison sur l'axe du canon.
2°. La grosseur du canon à chacun de ces deux points ,
ou leurs distances au même axe. Le premier de ces points
est sans contredit sur le tonnerre à l'extrémité du canon ;
à l'égard du second , on pourroit d'abord croire que c'est
le sommet du bouton de visiere ou guidon placé sur la
bande inférieure de l'embouchoire ; mais comme ce bouton
ne laisse pas d'être élevé , l'angle de mire deviendrait

très-petit & le but en blanc trop rapproché. Ce guidon ne doit donc servir qu'à assurer la direction; c'est la circonférence la plus saillante vers la bouche du canon qui doit régler l'inclinaison de la ligne de mire, parce qu'elle sépare sur l'objet que l'on veut frapper la partie que l'œil découvre d'avec celle qui lui est cachée. Cette circonférence, que la bayonnette soit au bout du fusil, ou qu'elle n'y soit pas, se trouve à l'extrémité du canon; de manière que dans les deux cas, la distance des deux points qui déterminent la position de la ligne de mire est égale à la longueur du canon. Or, par le règlement de 1777 la longueur du canon de fusil est de 42 pouces; son diamètre extérieur à la culasse est de 14 lignes 3 points; & à la bouche de 9 lignes 6 points; avec la bayonnette ce dernier diamètre est de 11 lignes, parce que la douille a environ 9 points d'épaisseur.

Mais par le même règlement cette douille est garnie d'une virole servant à assujettir la bayonnette sur le fusil; elle est faite d'une lame de fer d'environ 9 points d'épaisseur, ce qui donne en cet endroit, où se trouve alors la circonférence la plus saillante, un diamètre de 12 lignes 6 points; & comme la virole est éloignée de 16 lignes du bout du fusil, il en résulte 40 points 8 lignes pour l'intervalle entre les deux points qui déterminent la ligne de mire; on a donc, en employant les mêmes dénominations que pour le canon, §. 71.

$$l = \begin{cases} 42 \text{ pouces ou } 504 \text{ lignes.} \\ 40 \text{ po. } 8 \text{ li. ou } 488 \text{ lignes avec la virole.} \end{cases}$$

$$m = \dots\dots\dots 7,125.$$

$$n = \begin{cases} \dots\dots 4,75 \text{ lig. sans bayonnette.} \\ \dots\dots 5,5 \quad \text{avec bayonnette sans virole.} \\ \dots\dots 6,25 \quad \text{avec la virole.} \end{cases}$$

Ces dimensions donnent pour $\log. \text{ tang. } I$, I étant l'angle de mire, dont la tangente est exprimée par $\frac{m-n}{l}$, favoir :

Log. tang. I . Angle de mire.

Pour le fusil sans bayonnette, 7,6732331....16' 12"
 Bayonnette sans virole.....7,5084229....11 5
 Avec la virole.....7,2535883.... 6 10

Si l'on substitue ces valeurs de tang. I dans la formule $x = c \left(\sqrt{\left(\frac{V^2 \text{ tang. } I}{15,1 c} + \frac{1}{4} \right)} - \frac{1}{2} \right)$, qui donne la portée de but en blanc §. 148 ; on trouvera, en supposant la vitesse initiale de la balle, ou $V = 1600$ pieds, que la portée de but en blanc du fusil d'infanterie, suivant le modèle de 1777, est, favoir :

To.

Sans la bayonnette.....89,3.
 Avec la bayonnette sans virole...66,66.
 Avec la virole41,29.

183. Si l'on fait ensuite usage de la formule $\left((\text{tang. } I \times l - (m - n)) \frac{x}{l} \right)$, dans laquelle $\text{tang. } I = \frac{15,1}{V^2} \left(\frac{x^2}{c} + x \right)$, & qui sert à connoître la quantité dont il faut viser plus bas que le but, lorsqu'on est en deçà de la portée de but en blanc, & plus haut quand on est au delà, on aura les résultats rapportés dans la table suivante, où les nombres qui répondent à des distances

moindres que la portée de but en blanc, indiquent de combien la balle frappe plus haut que le point où aboutit la ligne de mire ; ou, ce qui revient au même, de combien il faut viser plus bas que le point qu'on veut frapper. Les nombres qui répondent à des distances plus grandes que la portée de but en blanc, indiquent les quantités dont il faut viser au dessus du même point à ces distances ; enfin on y voit les portées de but en blanc relativement à trois différentes vitesses initiales de la balle : celles de 1600, 1500 & 1400 pieds par seconde, qui résultent à peu près des charges de 36, 40 & 45 à la livre.



TABLE IX.

Du tir du fusil d'infanterie.

VITESSES initiales.	DISTANCES du but.	FUSIL sans bayonnette.	Bayonnette sans virole.	Avec la virole.
	to.	pi.	pi.	pi.
	10	0,26	0,17	0,09
	20	0,47	0,29	0,12
	30	0,63	0,36	0,10
	40	0,72	0,36	0,01
	41,29			But en blanc.
	50	0,74	0,29	0,14
pi.	60	0,68	0,14	0,37
1600	66,66		But en blanc.	
Charge	70	0,54	0,09	0,69
de 36	80	0,31	0,41	1,10
à la livre.	89,3	But en blanc.		
	90	0,03	0,83	1,60
	100	0,46	1,36	2,21
	120	1,63	2,75	3,78
	140	3,41	4,66	5,86
	160	5,69	7,12	8,97
	180	8,60	10,21	11,75
	200	12,22	14,01	15,68

SUITE DE LA TABLE IX.

VITESSES initiales.	DISTANCES du but.	FUSIL sans bayonnette.	Bayonnette sans virole.	Avec la virole.
	to.	pi.	pi.	pi.
	10	0,26	0,17	0,08
	20	0,46	0,28	0,11
	30	0,59	0,33	0,06
	36,92			But en blanc.
	40	0,67	0,30	0,04
pi.	50	0,64	0,20	0,23
1500	60	0,54	But en blanc.	0,51
Charge	70	0,34	0,29	0,89
de 40	80	0,04	0,68	1,37
à la livre.	81	But en blanc.		
	90	0,39	1,18	1,96
	100	0,92	1,81	2,67
	120	2,38	3,45	4,48
	140	4,42	5,67	6,87
	160	7,10	8,53	10,14
	180	10,49	12,09	13,64
	200	14,64	16,42	18,43

SUITE DE LA TABLE IX.

VITESSES initiales.	DISTANCES du but.	FUSIL sans bayonnette.	Bayonnette sans virole.	Avec la virole.
	10.	pi.	pi.	pi.
	10	0,25	0,16	0,08
	20	0,44	0,26	0,09
	30	0,56	0,29	0,03
	32,78			But en blanc.
	40	0,59	0,23	0,11
	50	0,53	0,08	0,35
pi.	53,74		But en blanc.	
1400	60	0,37	0,17	0,68
Charge	70	0,10	0,53	1,13
de 45	72,74	But en blanc.		
à la livre.	80	0,29	1,01	1,70
	90	0,81	1,62	2,39
	100	1,47	2,36	3,22
	120	3,24	4,31	5,34
	140	5,66	6,91	8,11
	160	8,81	10,25	11,62
	180	12,79	14,40	15,94
	200	17,64	19,42	21,14

Le fusil de l'artillerie ne diffère de celui de l'infanterie, relativement aux dimensions, que par la longueur qui

est de 34 pouces, & par la position de la virole, qui se trouve éloignée du bout du fusil de 29 lignes, ce qui donne $l = 31,583$ pouces, ou 379 lignes; les valeurs de m & n sont les mêmes qu'au fusil de l'infanterie. On a donc dans ce cas pour log. tang. I, favoir :

Log. tang. I. Angle de mire.

Pour le fusil sans bayonnette, 7,7970244....21' 34"

Bayonnette sans virole,7,6322142....14 44

Avec la virole,7,3633689.... 7 56

D'où l'on tire les résultats rapportés dans la table suivante :

TABLE X.

Du tir du fusil de l'artillerie.

VITESSES initiales.	DISTANCES du but.	FUSIL sans bayonnette.	Bayonnette sans virole.	avec la virole.
	10.	pi.	pi.	pi.
	30	0,79	0,46	0,16
	40	0,93	0,48	0,07
	45,71			But en blanc.
pi.	50	0,98	0,42	0,08
1500	60	0,94	0,28	0,33
charge	70	0,81	0,03	0,67
de 36	71		But en blanc.	
à la livre.	80	0,57	0,31	1,12
	90	0,22	0,77	1,68
	94,9	But en blanc.		
	100	0,25	1,35	2,36
	110	0,85	2,06	3,17
	120	1,58	2,91	4,11

SUITE DE LA TABLE X.

VITESSES initiales.	DISTANCES du but.	FUSIL sans bayonnette.	Bayonnette sans virole.	Avec la virole.
pi. 1400 charge de 40 à la livre.	to.	pi.	pi.	pi.
	30	0,76	0,43	0,12
	40	0,86	0,41	0,01
	40,77			But en blanc.
	50	0,86	0,31	0,19
	60	0,77	0,11	0,50
	63,71		But en blanc.	
	70	0,56	0,21	0,72
	80	0,24	0,79	1,37
	85,55	But en blanc.		
	90	0,21	1,21	2,11
	100	0,81	1,91	2,91
	110	1,94	2,70	3,86
	120	2,44	3,76	4,97
pi. 1300 charge de 45 à la livre.	30	0,71	0,38	0,08
	36,18			But en blanc.
	40	0,78	0,33	0,07
	50	0,73	0,18	0,32
	57,04		But en blanc.	
	60	0,57	0,09	0,69
	70	0,28	0,49	1,19
	76,99	But en blanc.		
	80	0,14	1,02	1,82
	90	0,71	1,70	2,61
	100	1,44	2,54	3,55
	110	2,34	3,55	4,66
	120	3,42	4,74	5,95

184. Nous voici maintenant en état d'apprécier les estimations données par l'auteur de la Tactique générale sur la pratique du tir des fusils: nous en extrairons à cet effet les principaux articles concernant cette pratique, &c

nous y joindrons nos observations. Les principes de l'auteur n'étant annoncés que comme des vérités approximatives, on ne peut douter que son vœu ne soit qu'on parvienne à une plus grande précision. Nous nous bornons ici au fusil d'infanterie, & à la vitesse initiale de 1600 pieds par seconde.

1^{er}. ARTICLE. *Il est à peu près constant que la balle, suivant sa trajectoire, se trouvera à 60 toises environ, à un pied & demi ou deux d'élévation au dessus de la ligne de mire; que ce sera là le point où elle sera le plus élevée au dessus de cette ligne.*

OBSERVATION. On voit par nos tables, 1°. qu'en supposant le fusil dégarni de sa bayonnette, le point de la trajectoire le plus élevé au dessus de la ligne de mire, n'en est éloigné que de 0,74 de pied, ou environ 9 pouces, & que c'est à 50 toises du fusil que la balle se trouve à ce point, 2°. Qu'avec la bayonnette sans virole ce point n'est éloigné du fusil que de 30 à 40 toises, & de la ligne de mire de 4 à 5 pouces. 3°. Qu'enfin avec la virole ces distances sont encore moindres.

2^e. ARTICLE. *La balle continuant de décrire sa parabole, & ramenée vers la ligne de mire par l'attrait de sa pesanteur, elle recoupera cette ligne environ à cent ou cent vingt toises, & achèvera de parcourir sa trajectoire, &c.*

OBSERVATION. Le second point d'intersection de la trajectoire avec la ligne de mire se trouve à la distance de 89 toises quand il n'y a point de bayonnette au bout du fusil; la bayonnette sans virole rapproche ce point & le met à 66 toises; la virole raccourcit encore cette distance, qui n'est plus alors que de 41 toises.

3^e. ARTICLE. *Soit un but haut de six pieds & partagé*

en trois dimensions de deux pieds chacune ; il n'y a aucune distance à laquelle il faudra viser deux pieds plus bas que la ligne horizontale sur laquelle ce but est planté , puisqu'alors , ce qui pourroit arriver de plus heureux , seroit de l'atteindre à sa base.

OBSERVATION. Cet article se rapporte au premier , dont il résulte que la plus grande quantité dont il faille viser au dessous d'un but , ne va pas à 9 pouces.

4^e. ARTICLE. *Si l'on est à 50 ou 60 toises , il faut viser dans la dimension du milieu pour atteindre à la dimension supérieure , ou bien dans la dimension inférieure pour frapper dans la dimension du milieu. Si l'on est à 100 toises , il faut viser au haut de la dimension inférieure pour frapper dans la dimension du milieu ; & au haut de la dimension du milieu , pour frapper dans la dimension supérieure.*

OBSERVATION. Puisqu'à la distance de 50 à 60 toises la ligne de mire ne s'écarte de la trajectoire que de 8 à 9 pouces , lorsqu'on tire sans la bayonnette ; & de 2 à 3 pouces seulement avec la bayonnette sans virole ; il s'ensuit que pour ces deux cas , en quelque point que l'on vise dans les deux dimensions inférieures , on ne manquera pas le but , ni même en visant dans la moitié inférieure de la dimension supérieure. On voit aussi qu'avec la virole on ne manquera point le but en visant sur quelque point que ce soit des deux dimensions supérieures. Si l'on est à 100 toises , c'est dans la dimension supérieure , ou dans celle du milieu , qu'il faut viser pour frapper dans celle-ci , ou dans l'inférieure. La virole ne fait ici de différence , qu'en ce qu'elle oblige à ne pas viser trop bas dans la dimension du milieu.

5^e. ARTICLE. *Ce qu'on peut dire de certain , c'est que la*

portée des fusils dont notre infanterie est armée, est sous une direction à peu près horizontale d'environ 180 toises, c'est pour cela que dans la construction des places de guerre, on a déterminé entre 120 à 140 toises les lignes de défense; depuis le flanc jusqu'à l'angle flanqué, le reste de la portée devant passer le fossé & atteindre le chemin couvert.

OBSERVATION. Lorsque la ligne de mire est horizontale & élevée de 5 pieds au dessus de la superficie du terrain, la balle rencontrera ce terrain, s'il est de niveau, à la distance d'environ 155 toises en tirant sans bayonnette au bout du fusil; avec la bayonnette sans virole la distance de ce point de chute sera de 145 toises; & de 135 avec la virole. A l'égard de la portée de 180 toises, on ne peut l'obtenir qu'en visant, sans bayonnette, à 8,6 pieds au dessus du point que la balle doit frapper; ou à 10,2 pieds avec bayonnette sans virole; ou 12 pieds environ avec la virole.

6^e. ARTICLE. *Ce qu'il y a de certain encore, c'est qu'une balle tirée à charge ordinaire du fusil, & suivant une ligne parallèle à l'horizon, ne décline guère de plus d'un pied & demi ou deux pieds avant d'atteindre à 200 toises.*

OBSERVATION. La déclinaison dont il s'agit ici ne peut se compter que de la ligne de mire ou de l'axe du canon: de façon ou d'autre elle est toujours beaucoup plus grande qu'on ne le dit dans cet article; car on voit par la table, qu'à 200 toises & pour le fusil sans bayonnette, la balle est de 12 pieds au dessous de la ligne de mire, & par conséquent de plus de 17 pieds au dessous de l'axe du fusil; la ligne de mire se trouvant à cette distance éloignée de plus de 5 pieds de la direction de l'axe. Si la bayonnette est au bout du fusil; si elle est garnie d'une

virole, la déclinaison de la balle à l'égard de la ligne de mire sera plus considérable à la même distance ; elle sera de 14 à 16 pieds, quoique toujours la même par rapport à l'axe du canon ; puisque la bayonnette & la virole ne font qu'élever la ligne de mire en la rapprochant de l'axe du canon, sans rien changer à la trajectoire de la balle.

185. Les observations que nous venons de faire ne concernent, comme nous l'avons dit, que le fusil d'infanterie conforme au modèle de 1777, & dans le cas où la vitesse de la balle est de 1600 pieds, ou la charge de 36 à la livre ; il est si facile, sur l'inspection des tables, de les appliquer à d'autres vitesses, & au fusil de l'artillerie, qu'il seroit superflu de nous y arrêter. Contentons-nous d'ajouter quelques réflexions qui, quoique l'usage militaire du fusil ne soit pas de notre compétence, ne sont cependant point étrangères au sujet que nous traitons.

Ce qui caractérise principalement la bonté d'un fusil, eu égard à ses dimensions, c'est qu'elles soient tellement proportionnées qu'on puisse ajuster le coup, de manière qu'à une grande distance la ligne de mire s'écarte le moins possible du point que la balle doit frapper, ou, pour mieux dire, que cette ligne ne forte point de l'objet que l'on veut atteindre, sa hauteur étant estimée de 5 à 6 pieds. La distance dont nous voulons parler est cependant renfermée dans certaines bornes, & nous ne devons considérer que celles auxquelles on tire communément, soit dans un siège, soit en rase campagne : elle peut aller, dans le premier cas, jusqu'à 180 toises ; & dans le second, de 80 à 100 toises.

Arrêtons-nous à celle de 160 toises, qui est une des plus grandes auxquelles la défense des places oblige de

tirer : c'est à peu près celle du flanc d'un bastion à la place d'armes saillante du chemin couvert vis-à-vis le bastion opposé. En supposant au mobile une vitesse initiale de 1600 pieds, & le fusil dégarni de la bayonnette, nos tables indiquent qu'à cette distance on vise un peu au dessus d'un but haut de 5 à 6 pieds, la balle ne manquera pas de l'atteindre ; mais avec la bayonnette & la virole, pour que dans le même cas la balle rencontrât ce but, il faudroit viser plusieurs pieds au dessus, c'est-à-dire dans le vague de l'air, sans avoir de point fixe où la ligne pût aboutir, ce qui rend nécessairement le coup très-incertain. Cet inconvénient augmentera sensiblement, si le but est plus éloigné, ou si la balle a une moindre vitesse initiale. Il suit de là qu'à la distance de 140 à 160 toises, la bayonnette est un obstacle à la justesse du tir ; mais comme elle est de toute inutilité au soldat couvert d'un parapet, il est à présumer que dans cette circonstance on le dispense d'armer son fusil de la bayonnette, afin qu'il puisse en tirer le parti le plus avantageux, & viser au loin avec justesse & précision.

186. A l'égard de l'usage du fusil en rase campagne, on voit par nos tables qu'à la distance de 80, 100 & même 120 toises, la bayonnette garnie de sa virole n'empêche point qu'on ne puisse frapper un objet élevé de 5 à 6 pieds, en dirigeant la ligne de mire sur quelques points de la partie supérieure, quand même la vitesse initiale de la balle ne seroit que de 1400 pieds par seconde. Enfin, la bayonnette & sa virole ne sont vraiment nuisibles à la justesse du tir que lorsque le but a très-peu d'étendue en hauteur : car alors tout dépend de la portée de but en blanc, qui, déjà considérablement diminué par

la douille de la bayonnette, l'est encore plus par l'addition de la virole.

Nous terminons ici nos réflexions sur l'usage & les propriétés du fusil, laissant aux personnes plus versées que nous dans les détails de l'art militaire, le soin d'en apprécier le mérite, & d'en faire l'application aux différens cas de guerre. Il nous reste à parler du tir du mortier.

Du tir des mortiers.

187. Si la théorie que nous avons employée jusqu'à présent, a eu quelque succès dans son application au tir des canons, des obusiers & des fusils, c'est qu'elle est restreinte à des cas de pratique particuliers à ces sortes d'armes, dont le tir est communément horizontal ou presque horizontal; c'est qu'alors la courbe décrite par le projectile s'écarte peu de la ligne de mire, & que dans l'étendue de la portée de but en blanc elle diffère peu de la ligne droite. Il n'en est point ainsi du tir des mortiers: la bombe projetée sous un angle plus ou moins ouvert décrit dans sa course une courbe dont les élémens ont tous des inclinaisons différentes, qu'il seroit facile de déterminer si la bombe n'étoit soumise qu'à la force de projection & à l'action de la pesanteur: on trouveroit dans ce cas $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$, & $d\left(\frac{dy}{dt}\right) = -gdt$; (note du §. 28) & la courbe seroit une parabole. Mais puisque ce projectile se meut dans l'air, son mouvement doit être continuellement retardé par la résistance que ce fluide lui oppose; il y aura donc une diminution de vitesse dans le sens vertical & une dans le sens horizontal: la première sera composée de l'effet de la résistance du milieu & de

l'action de la pesanteur ; elle sera exprimée , en nommant R la force résistante de l'air par $\frac{R \, dy \, dt}{ds} + g \, dt$, & la seconde par $\frac{R \, dx \, dt}{ds}$; on aura donc les deux équations $d \left(\frac{dy}{dt} \right) = -\frac{R \, dy \, dt}{ds} - g \, dt$; & $d \left(\frac{dx}{dt} \right) = -\frac{R \, dx \, dt}{ds}$, qui reviennent, comme cela doit être, à $d \left(\frac{dy}{dt} \right) = -g \, dt$, & $d \left(\frac{dx}{dt} \right) = 0$, lorsque la résistance du milieu est nulle, ou lorsque le mouvement s'exécute dans le vuide.

188. Si l'on intègre ces deux équations en mettant pour R ce que donne la loi de la résistance, relativement à la densité du milieu, résistant à la vitesse, la densité & la figure du mobile, on connoîtra la courbe décrite & toutes les circonstances du mouvement. Mais telle est la difficulté de cette intégration que, depuis Newton qui a ouvert la carrière, on n'a pu encore y parvenir qu'avec le secours des approximations, moyen suffisant sans doute dans bien des cas, mais qui, dans celui dont il s'agit, a eu l'inconvénient de conduire ceux qui l'ont employé à des résultats très-différens l'un de l'autre : nous voyons, par exemple, deux solutions de ce problème qui ont paru à peu près dans le même temps : fondées l'une & l'autre sur la même hypothèse de résistance, déduites d'épreuves faites dans les mêmes circonstances, on devoit naturellement s'attendre aux mêmes conséquences ; cependant il résulte de l'une qu'un boulet de 24 porté à 2200 toises sous l'angle de 45 degrés, a dû être lancé avec une vitesse initiale de 1393 pieds, & de l'autre avec une vitesse initiale de 1950 pieds. Cette diffé-

rence est trop considérable pour n'être point l'effet d'une erreur qui ne peut avoir sa source que dans l'usage des approximations. Quelqu'élégantes que soient d'ailleurs ces deux solutions, nous croyons par cette seule raison pouvoir nous dispenser de les mettre sous les yeux de nos lecteurs, & nous en tenir à celle du célèbre Euler, insérée dans le Recueil des Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1753. Si son application à la pratique entraîne dans de longs calculs, cet inconvénient lui est commun avec les autres solutions : celle-ci se distingue sur-tout par le peu d'arbitraire que l'auteur y a mis, par la clarté & l'exactitude qui caractérisent tous ses ouvrages.

189. Soit donc a le diamètre du projectile sphérique, D sa densité, D' celle du fluide dans lequel il se meut ; $\frac{D-D'}{D}$ fera la force accélératrice de la gravité dans ce fluide ; nous la nommerons k . Nous prendrons aussi c que nous avons déjà employé (§. 128), pour exprimer la loi de la résistance de l'air, & nous ne changerons rien à la valeur qui lui a été attribuée, parce que, 1°. jusqu'à la hauteur à laquelle les bombes s'élèvent dans le tir des mortiers, que nous avons ici uniquement en vue, la variation de densité de l'air n'est point assez sensible pour y avoir égard. 2°. Le mouvement des bombes n'est jamais assez rapide, du moins après les premiers instans, pour que l'air, en vertu de son élasticité, ne puisse remplir aussi-tôt l'espace qu'elles viennent d'abandonner, ce qui dispense de considérer une plus grande pression sur la partie antérieure de ces projectiles que sur la partie postérieure.

190. Soit maintenant la courbe CNAMH (fig. 35),

décrite dans l'air par une bombe : si A est le point le plus élevé, & l'horizontale BAE la tangente à ce point, CNA sera la portion de cette courbe que le mobile parcourt en montant, & AMH celle qu'il décrit en descendant. Considérons séparément le mouvement dans l'une & l'autre de ces deux portions, & soit pour celle de la descente une abscisse quelconque $AP = x$ prise sur l'horizontale, & l'ordonnée correspondante $PM = y$. Nommons v la hauteur due à la vitesse de la bombe en M , $\frac{v}{c}$ exprimera la force retardatrice de la résistance de l'air au même point.

191. Décomposant le mouvement suivant la direction horizontale AB & la verticale PM , celui-ci sera premièrement accéléré par la force accélératrice de la gravité $= k$; ensuite, puisque la force retardatrice $\frac{v}{c}$ agit suivant la tangente MT , si nous supposons l'élément Mm de la courbe $= ds$, il en résultera deux forces, dont l'une $= \frac{v ds}{c ds}$ s'oppose au mouvement horizontal, & l'autre $= \frac{v dy}{c ds}$ au mouvement vertical; donc si on fait l'élément du temps $= dt$, de sorte que $dt = \frac{ds}{v}$, cet élément étant regardé comme constant, on aura par les principes de mécanique :

$$\frac{2 dds}{dt^2} = -\frac{v ds}{c ds}; \text{ \& } \frac{2 ddy}{dt^2} = k - \frac{v dy}{c ds}.$$

Puisque $dt = \frac{ds}{v}$, on a $v = \frac{ds^2}{dt^2}$, ce qui change les deux équations précédentes en celles-ci : $\frac{2 dds}{dt^2} = -\frac{ds ds}{c dt^2}$ & $\frac{2 ddy}{dt^2} = k - \frac{y dy ds}{c dt^2}$. Supposons $dy = p dx$,

p étant la tangente de l'angle PTM que la direction du mouvement fait avec l'horizon ; à cause de $ds = dx \sqrt{(1 + pp)}$, & $ddy = dp dx + p ddx$, les mêmes équations deviendront :

$$\frac{2 ddx}{dt^2} = - \frac{dx^2 \sqrt{(1 - pp)}}{c dt^2} \text{ \& } \frac{2 p ddx}{dt^2} + \frac{2 dx dp}{dt^2} \\ = k - \frac{p dx \sqrt{(1 + pp)}}{c dt^2}. \text{ La premiere multipliée par } p \\ \text{\& retranchée de la seconde, donne } \frac{2 dx dp}{c dt^2} = k; \text{ ou } \\ k dt^2 = 2 dx dp. \text{ La premiere donne aussi } \frac{-2 ddx}{dx^2} = \\ \frac{\sqrt{(1 + pp)}}{c}; \text{ on a donc enfin } v = \frac{dx^2 (1 + pp)}{dt^2} \\ = \frac{k dx (1 + pp)}{2 dp}.$$

192. Puisque $2 dp = \frac{k dt^2}{dx}$, l'équation $\frac{-2 ddx}{dx^2} = \frac{\sqrt{(1 + pp)}}{c}$ multipliée par dp , donne $\frac{-2 k dt^2 ddx}{dx^3} = \frac{2 dp \sqrt{(1 + pp)}}{c}$, dont l'intégrale, à cause de dt constant, est $\frac{k dt^2}{dx^2} = \frac{2 dp}{dx} = 2 C \frac{2}{c} \int dp \sqrt{(1 + pp)}$, d'où l'on tire :

$$dx = \frac{dp}{C + \frac{1}{c} \int dp \sqrt{(1 + pp)}};$$

$$dy = \frac{p dp}{C + \frac{1}{c} \int dp \sqrt{(1 + pp)}};$$

$$ds = dx \sqrt{(1 + pp)} = \frac{dp \sqrt{(1 + pp)}}{C + \frac{1}{c} \int dp \sqrt{(1 + pp)}};$$

$$dt = \frac{\sqrt{2 dx dp}}{\sqrt{k}} = \frac{dp}{\sqrt{\frac{1}{2} k} \left(C + \frac{1}{c} \int dp \sqrt{(1 + pp)} \right)};$$

$$\text{\& } v = \frac{dx^2}{dt^2} = \frac{\frac{1}{2} k (1 + pp)}{C + \frac{1}{c} \int dp \sqrt{(1 + pp)}}.$$

193. La formule intégrale $\int dp \sqrt{1 + pp}$ qui entre dans ces expressions, est évidemment un arc parabolique : elle peut être exprimée par logarithmes, puisque $\int dp \sqrt{1 + pp} = \frac{1}{2} p \sqrt{1 + pp} + \frac{1}{2} l(p + \sqrt{1 + pp})$; l'intégrale étant prise de façon qu'elle soit zéro lorsque $p = 0$, c'est-à-dire au sommet de la courbe. Si donc pour un point quelconque de la courbe on connoît l'angle que la direction du mouvement fait avec l'horizon, & dont la tangente $= p$, on pourra déterminer l'abscisse $AP = x$; l'ordonnée $PM = y$; l'arc $AM = s$; la hauteur v due à la vitesse, & le temps t employé à parcourir l'arc AM .

194. A l'égard de la constante C , introduite par l'intégration, on pourra la représenter par $\frac{n}{c}$, n désignant un nombre abstrait. Supposons ensuite pour plus de simplicité $\int dp \sqrt{1 + pp} = P$, on aura pour la branche descendante AMH les formules suivantes : $x = c \int \frac{dp}{n+p}$; $y = c \int \frac{p dp}{n+p}$; $s = c \int \frac{dp \sqrt{1+pp}}{n+p}$; $t = \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{k}} \int \frac{dp}{\sqrt{(n+p)}}$ & $v = \frac{1}{2} k c \frac{(1+pp)}{n+p}$. Ces intégrales doivent être prises de manière qu'elles s'évanouissent dans le cas de $p = 0$, d'où l'on voit que la hauteur due à la vitesse au sommet $A = \frac{k c}{2 n}$.

195. Les mêmes formules peuvent aussi servir pour la branche ascendante ANC en prenant la valeur de p négative; ainsi pour un point quelconque N de cette branche on aura $AQ = c \int \frac{dp}{n-p}$; $QN = c \int \frac{p dp}{n-p}$; $AN = c \int \frac{dp \sqrt{1+pp}}{n-p}$; le temps par l'arc $AN =$

$\frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{k}} \int \frac{dp}{\sqrt{(n-p)}}$; & la hauteur due à la vitesse en $N = \frac{\frac{1}{2} k c (1+pp)}{n-p}$. D'où l'on voit que dans la branche ascendante ANC, l'inclinaison de ses tangentes ne peut aller jusqu'à rendre $P > n$, & que là où $P = n$ la vitesse du mobile seroit infinie.

196. Le mouvement de la bombe & la courbe qu'elle décrit dépendent donc des trois constantes k , c & n , dont les deux premières sont faciles à connoître; on peut même, dans le cas dont il s'agit, des projectiles de l'artillerie lancés dans l'air, mettre 1 à la place de k ; parce que dans sa valeur $\frac{D-D'}{D}$ (§. 189) la quantité D' , qui exprime la densité de l'air, peut se négliger vis-à-vis de D , qui est la densité du projectile. A l'égard de la troisième constante n , qui dépend de la vitesse imprimée au mobile, comme elle entre dans toutes nos formules, il faut nécessairement les calculer séparément pour chaque valeur de n .

197. Pour avoir le rayon de la développée de cette courbe, dont la formule générale est $\frac{ds^2}{dx \frac{dy}{dx}}$, on observera que $ds = c \int \frac{dp \sqrt{(1+pp)}}{n \pm p}$; $dy = p dx$; $\frac{dx}{dp} = \frac{c}{n \pm p}$; ces valeurs étant substituées dans la formule, on trouvera que le rayon de courbure est $\frac{c(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}{n \pm p}$ pour un point quelconque M de la branche descendante; & $\frac{c(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}{n - p}$ pour la branche ascendante, dans laquelle à l'endroit où $P = n$; & par conséquent la vitesse infinie (§. 195), le rayon

de courbure devient aussi infiniment grand. Il est donc évident qu'aux points des deux branches où les tangentes sont également inclinées à l'horizon, le rayon de courbure, ainsi que les autres quantités x, y, s, t & v sont plus grandes dans la branche ascendante que dans la descendante.

198. Il suit de là que dans un milieu résistant les deux branches de la trajectoire sont dissemblables : celle de la descente est plus courbe que celle de la montée ; le mouvement par celle-ci est plus rapide que par celle-là ; au lieu que dans le vuide tout est égal & semblable de part & d'autre, & à égales distances du sommet ; ce qu'on peut d'ailleurs aisément déduire des formules précédentes : car pour le mouvement dans le vuide la quantité c devient infinie, de même que le nombre n , puisque $\frac{k c}{2 n}$ indiquant la hauteur due à la vitesse au sommet A, doit être une quantité finie ; donc P disparaît vis-à-vis de n , & comme on a $k = 1$, si on fait $\frac{c}{2 n} = b$, on aura pour le vuide $x = 2 b p$; $y = b p p$; $s = 2 b f d p \sqrt{1 + p p}$; $t = 2 p \sqrt{b}$; $v = b (1 + p p)$, & le rayon de courbure $= 2 b (1 + p p)^{\frac{3}{2}}$, ce qui ne convient qu'à la parabole.

199. Une autre propriété qu'on découvre dans la trajectoire décrite dans un milieu résistant, c'est qu'elle a deux asymptotes, l'une verticale du côté de la branche descendante, & l'autre inclinée pour la branche ascendante ; l'angle que celle-ci fait avec l'horizon est telle que faisant sa tangente $= p$, on aura $P = n$, ou $n = \frac{1}{3} p \sqrt{1 + p p} + \frac{1}{2} l (p + \sqrt{1 + p p})$. De sorte que le nombre n est susceptible d'une infinité de valeurs dépendantes de la tangente p de l'angle que forme avec l'horizon

l'asymptote de la branche ascendante. Chacune de ces valeurs constitue une espèce particulière de trajectoire. D'où l'on voit que pour faire usage de nos formules, & connoître toutes les espèces de courbes qu'un mobile peut décrire dans un milieu résistant, on ne peut se dispenser d'avoir une table qui indique toutes les valeurs de P déduites de celles de p . Pour calculer cette table, on observera que p étant la tangente de l'inclinaison de la courbe à l'égard de l'horizon, on aura, en faisant cet angle $= I$; $p = \text{tang. } I$; $\sqrt{(1 + pp)} = \text{sec. } I$, & $P = \frac{1}{2} \text{ tang. } I \text{ sec. } I + \frac{1}{2} I (\text{tang. } I + \text{sec. } I) = (\S. 16) \frac{1}{2} \text{ tang. } I \text{ sec. } I + \frac{1}{2} I \text{ tang. } (45^\circ + \frac{1}{2} I)$; où il faut prendre les log. hyperboliques, en multipliant les log. ordinaires par 2,30258509. Cette table, pour être complète & applicable à tous les angles de projection, doit être calculée pour tous les degrés du quart de cercle ; il conviendrait même, si on vouloit l'appliquer au tir du canon, qu'elle le fût pour les minutes des premiers degrés. Celle que nous donnerons ci-après ne sera relative qu'au jet des bombes.

200. Chacune des valeurs de P , prise pour valeur du nombre n , désignera une espèce particulière de trajectoire ; & quoiqu'il puisse y en avoir une infinité, il suffira, pour la pratique, d'en fixer un certain nombre relativement à l'espèce des projectiles. M. Euler borne ce nombre à dix-huit, en considérant l'inclinaison de l'asymptote comme croissant de 5 en 5 degrés à compter de 0 ; mais ce n'est qu'un exemple qu'il propose : nous verrons que pour le jet des bombes, qui est ici notre principal objet, ces espèces doivent être plus rapprochées, & que celles

qui répondent à toutes les valeurs de P déduites d'angles au dessous de 55 degrés, nous sont inutiles.

201. Revenons maintenant à nos formules, & voyons comment elles peuvent servir à faire connoître la figure de la courbe décrite par le projectile : celles qu'on a trouvées pour x , y & t ne sont point intégrales ; mais nous remarquons que l'arc $AM = S$ peut être exprimé par logarithme : car puisque $dp \sqrt{1 + pp} = dP$, on aura (§. 195) $S = c \int \frac{dP}{n + P} = c l \frac{n + P}{n}$; où il n'y a point de constante à ajouter, puisqu'au sommet A où $S = 0$, on a aussi $P = 0$. Voilà déjà une formule facile à calculer, qui nous conduira à une construction bien simple de la courbe. Il n'y a qu'à la supposer partagée en un assez grand nombre de portions, pour qu'à l'extrémité de chacune d'elles la différence d'inclinaison soit très-petite. Soit Mm une de ces portions ; soit la tangente de l'inclinaison en $M = p$, & en $m = q$; soit aussi $fdq \sqrt{1 + qq} = Q$, pour avoir $Am = c l \frac{n + Q}{n}$, comme on a $AM = c l \frac{n + P}{n}$; la portion Mm sera donc $= c l \frac{n + Q}{n} - c l \frac{n + P}{n} = c l \frac{n + Q}{n + P}$. Si on prend ensuite une moyenne entre les inclinaisons en M & m qui soit $= i$, on aura pour la portion Pp de l'abscisse qui répond à cet arc, $c \cos. i l \frac{n + Q}{n + P}$; & pour la portion $Pm - PM$ de l'ordonnée $c \sin. i l \frac{n + Q}{n + P}$; enfin rassemblant les sommes successives de toutes ces portions à commencer du sommet A où l'inclinaison est zéro, on aura

les abscisses & les ordonnées correspondantes pour chaque point M de la branche descendante; on aura de même les co-ordonnées pour chaque point N de la branche ascendante en changeant les signes des quantités P & Q; au moyen de quoi la figure de la courbe est déterminée.

202. A l'égard du mouvement du projectile, puisque la hauteur due à sa vitesse en M est $= \frac{\frac{1}{2} k c (1 + p p)}{n + P}$, la vitesse en m viendra de la chute d'une hauteur $= \frac{\frac{1}{2} k c (1 + q q)}{n + Q}$; prenant donc une moyenne entre les vitesses résultantes de ces deux formules, qui soit $= \sqrt{u}$, le temps employé à parcourir l'arc M m sera $= \frac{M m}{\sqrt{u}}$; ou bien on prendra une moyenne h entre les valeurs $\frac{\sqrt{(1 + p p)}}{n + P}$ & $\frac{\sqrt{(1 + q q)}}{n + Q}$, on aura $\sqrt{u} = h \sqrt{\frac{1}{2} k c}$, & le temps par l'arc M m sera $= \frac{\sqrt{2 c}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{h} l \frac{n + Q}{n + P}$. Pour avoir ce temps exprimé en secondes, soit g la hauteur de la chute pendant une seconde, le nombre de secondes sera $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2 k g}} \cdot \frac{1}{h} l \frac{n + Q}{n + P}$. On pourra aussi exprimer les vitesses par l'espace qu'elles feroient parcourir dans une seconde; la vitesse en M sera $= \sqrt{2 k c g} \cdot \frac{\sqrt{(1 + p p)}}{\sqrt{(n + P)}}$, & en N $\sqrt{2 k c g} \cdot \frac{\sqrt{(1 + p p)}}{\sqrt{(n - P)}}$.

203. Aux logarithmes hyperboliques employés dans ces formules, on peut substituer les logarithmes ordinaires, en multipliant ceux-ci par 2,30258509, dont le log. commun est 0,3622156; de sorte qu'au moyen de ces logarithmes communs, un arc quelconque M m de la branche descendante sera $2,302585 c l \frac{n + Q}{n + P}$, & ce

coefficient conviendra aussi aux abscisses & aux ordonnées. La vitesse en M sera exprimée par l'espace $\sqrt{2kcg}$. $\frac{\sqrt{(1+\sigma n)}}{\sqrt{(n+P)}}$ qu'elle fait parcourir en une seconde, & le temps par l'arc Mm fera de $\frac{2.302585}{\sqrt{2kcg}} \cdot \frac{1}{h} \int \frac{n+Q}{n+P}$ secondes. Ces expressions conviennent également à chaque point N de la branche ascendante, il suffit d'affecter les quantités P & Q du signe — au lieu du signe +.

204. Il est aisé de voir à présent que la forme de la courbe dépend essentiellement de la valeur du nombre n : que c'est ce nombre qui en caractérise les différentes especes, & que les courbes résultantes de la même valeur de n sont toutes semblables entre elles, quelles que soient les diverses valeurs des quantités k & c , qui n'entrent dans le calcul que pour déterminer la grandeur de la courbe sans influencer sur son espece. Quant à celles de ces especes que nous avons à considérer pour le tir des mortiers, l'expérience nous a appris qu'elles ne commencent qu'à la valeur de P déduite de l'angle de 55 degrés, & qu'elles sont assez rapprochées si ces valeurs, ou, ce qui revient au même, si les valeurs du nombre n sont prises de deux en deux degrés depuis 55° jusqu'à 77, ce qui fait douze especes indiqués dans la table suivante.



TABLE XI.

Des valeurs de n pour les douze especes de trajectoires relatives au jet des bombes.

Especes	Angle O L B	Valeurs du nombre n.	Especes	Angle O L B	Valeurs du nombre n.
1	55°	1,8220670	7	67°	3,8108137
2	57	2,0219938	8	69	4,4774405
3	59	2,25696,1	9	71	5,3540748
4	61	2,5367755	10	73	6,5440,195
5	63	2,8749043	11	75	8,2235643
6	65	3,2903953	12	77	10,7136570

205. Une autre table qu'il nous faut pour le calcul de nos formules, c'est celle dont il a été fait mention au §. 196, & dont la précédente est tirée : nous nous contenterons de donner les valeurs de P de cinq en cinq degrés, il sera aisé de conclure par interpolation ce qui convient aux angles intermédiaires. Cette table subsidiaire indique dans la premiere colonne les angles I; dans la seconde les valeurs de p , ou tang. I; dans la troisieme les valeurs de $p \sqrt{1 + pp}$, ou tang. I sec. I; dans la quatrieme celles de $l.(p + \sqrt{1 + pp}) = l \text{ tang. } (45^\circ + \frac{1}{2} I)$; enfin dans la cinquieme les valeurs de $P = \frac{1}{2} p \sqrt{1 + pp} + \frac{1}{2} l (p + \sqrt{1 + pp})$.

TABLE XII.

Des valeurs de la quantité P.

Angles I.	$p =$ tang. I.	tang. I sec. I.	$l \text{ tang.}$ $(45^\circ + \frac{1}{2} I)$.	P
0°				
5	0,0874887	0,0878229	0,0873773	0,0876001
10	0,1763270	0,1790471	0,1754259	0,1772365
15	0,2679492	0,2774014	0,2648421	0,2711218
20	0,3639702	0,3873290	0,3563784	0,3718537
25	0,4663077	0,5145136	0,4508752	0,4826944
30	0,5773503	0,6666666	0,5493059	0,6079863
35	0,7002075	0,8547958	0,6528363	0,7538161
40	0,8390996	1,0953666	0,7629033	0,9291380
45	1,0000000	1,4142136	0,8813732	1,1477934
50	1,1917536	1,8540400	1,0106827	1,4323614
55	1,4281480	2,4899000	1,1542341	1,8220670
60	1,7320508	3,4641020	1,3165572	2,3903256
65	2,1445069	5,0743371	1,5064535	3,2903953
70	2,7474774	8,0330855	1,7354146	4,8842500
75	3,7320508	14,4195400	2,0275887	8,2235643
80	5,6712818	32,6596153	2,4362452	17,5479302

206. A l'aide de ces deux dernières tables, il sera aisé de calculer nos formules, de trouver les valeurs des quantités s , x , y , $\sqrt{v}$ & t , pour chaque espèce de trajectoire, & pour tous les angles que la direction du mouvement fait avec l'horizon. Si l'on prend ces angles de cinq en cinq degrés, l'approximation sera suffisamment exacte pour la pratique : on supposera donc la courbe

divisée en parties telles que la différence d'inclinaison des tangentes menées aux deux extrémités de chaque portion Nn de la branche ascendante, ou Mm de la branche descendante, soit de cinq degrés; de sorte qu'à compter du sommet A , les angles d'inclinaison aux deux extrémités de la première seront 0 & 5 degrés; pour la seconde portion ils seront de 5 & 10 degrés; pour la troisième de 10 & 15 degrés, & ainsi de suite. Dans la première portion on aura i de $2^{\circ} 30'$; dans la seconde de $7^{\circ} 30'$; dans la troisième de $12^{\circ} 30'$ &c. Cela posé, nous allons donner quelques exemples du calcul des formules, en l'appliquant à la première espèce de trajectoire, dans laquelle $n = 1,8220670$.

Calcul de la formule $c 1 \frac{n \mp Q}{n \pm P}$, qui donne les arcs AN, AM.

Branche ascendante.

Ang. I.	$n - P$	$l(n - P)$	$l \frac{n - Q}{n - P}$	S
0	1,8220670	0,2605644	0,0000000	0,0000000
5	1,7344669	0,2391660	0,0213984	0,0213984
10	1,6448305	0,2161211	0,0230449	0,0444433
15	1,5509452	0,1905865	0,0255346	0,0699779
	&c.	&c.	&c.	&c.

Branche descendante.

	$n + P$	$l(n + P)$	$l \frac{n + Q}{n + P}$	S
0	1,8220670	0,2605644	0,0000000	0,0000000
5	1,9096671	0,2809577	0,0203933	0,0203933
10	1,9992035	0,3008787	0,0199210	0,0403143
15	2,0931888	0,3208084	0,0199297	0,0602440
	&c.	&c.	&c.	&c.

Multipliant ces valeurs de s par c & par 2,302585 ; à cause des logarithmes hyperboliques employés dans les formules , on aura la longueur réelle des arcs AN , AM.

Calcul des formules c cos. i l $\frac{n+Q}{n+P}$ & c sin. i l $\frac{n+Q}{n+P}$, qui donnent les portions d'abscisses & d'ordonnées.

Branche ascendante.

Ang. l.	$l\left(\frac{n+Q}{n+P}\right)$	log. des port. d'abf.	log. des port. d'ord.
0°	0,0000000	0,0000000	0,0000000
5	8,3303814 ajoutant	8,3299679 ajoutant	6,9700610
10	8,3625937 1° l cos. i	8,3588623 2° l sin. i	7,4782914
15	8,4071290	8,3967105	7,7424658
	portions d'abf.	abf. A Q.	portions d'ord.
			ord. QN.
0	0,0000000	0,0000000	0,0000000
5	0,0213780	0,0213780	0,0009334
10	0,0228487	0,0442267	0,0039415
15	0,0249293	0,0692560	0,0055267

Branche descendante.

	$l\left(\frac{n+Q}{n+P}\right)$	log. des port. d'abf.	log. des port. d'ord.
0	0,0000000	0,0000000	0,0000000
5	8,3094875 ajoutant	8,3090740 ajoutant	6,9491671
10	8,2993111 1° l cos. i	8,296597 2° l sin. i	7,4150088
15	8,2995008	8,2890823	7,6348376

Ang. I.	portions d'abf.	abf. A P.	portions d'ord.	ord. P M.
0	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
5	0,0203739	0,0203739	0,0008895	0,0008895
10	0,0197961	0,0401700	0,0026002	0,0034897
15	0,0194677	0,0596377	0,0043136	0,0078033

On multipliera pareillement ces abscisses & ordonnées par 2,302585c pour avoir leurs valeurs réelles.

Calcul de la formule $\sqrt{2kcg} \frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(n+P)}}$, qui donne la vitesse.

Branche ascendante.

	$l\sqrt{(n-P)}$	$l\sqrt{(1+pp)}$	$l\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(n-P)}}$	dont les nombres
0	0,1302822	0,0000000	9,8697178	0,74083
5	0,1195830	0,0016558	9,8820728	0,76221
10	0,1080605	0,0066485	9,8985880	0,79175
15	0,0952932	0,0150562	9,9197630	0,83131

Branche descendante.

	$l\sqrt{(n+P)}$	$l\sqrt{(1+pp)}$	$l\frac{\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{(n+P)}}$	dont les nombres
0	0,1302822	0,0000000	9,8697178	0,74083
5	0,1404788	0,0016558	9,8611770	0,72640
10	0,1504393	0,0066485	9,8562092	0,72227
15	0,1604042	0,0150562	9,8546520	0,71685

Ces derniers nombres étant multipliés par $\sqrt{2kcg}$,
28

on aura les vitesses du projectile à chaque point N & M de la courbe.

Calcul de la formule $\frac{2,302585 \sqrt{c}}{\sqrt{2kg}} \cdot \frac{1}{h} l \frac{n+Q}{n-P}$, qui donne le temps employé à parcourir chaque portion N n & M m de la courbe.

On prendra le log. de h moyenne entre les vitesses du mobile aux deux extrémités de chaque arc N n & M m.

Branche ascendante.

Ang. I.	h	$l h$	$l \left(l \frac{n+Q}{n-P} \right)$	$l \left(\frac{1}{h} l \frac{n+Q}{n-P} \right)$
0	0,00000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
5	0,75152	9,8759405	8,3303814	8,4544409
10	0,77698	9,8904098	8,3625937	8,4721839
15	0,81153	9,9093046	8,4071290	8,4978244
	$\frac{1}{h} l \frac{n+Q}{n-P}$			
0	0,0000000	pour le temps par N n	0,0000000	pour le temps par A N
5	0,0284735		0,0284735	
10	0,0296609		0,0581344	
15	0,0314658		0,0896002	

Branche descendante.

	h	$l h$	$l \left(l \frac{n+Q}{n-P} \right)$	$l \left(\frac{1}{h} l \frac{n+Q}{n-P} \right)$
0	0,00000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
5	0,73361	9,8654652	8,3094875	8,4440223
10	0,72433	9,8599365	8,2993111	8,4393746
15	0,71956	9,8570670	8,2995008	8,4424338

$$\text{Ang. } \frac{1}{L} \frac{\bar{n} + Q}{h l n + P}$$

0	0,0000000	} pour le temps par M m	0,0000000	} pour le temps par A M
5	0,0277986		0,0277986	
10	0,0275027		0,0553013	
15	0,0276971		0,0829984	

Les derniers nombres étant multipliés par $\frac{2,302585 \sqrt{c}}{\sqrt{2kg}}$, on aura le temps employé à parcourir chaque arc AN & A M.

C'est en continuant ces calculs que nous avons complété ce qui concerne la première espèce de trajectoire : nous en donnons ci-après le tableau pour servir de modèle au calcul des autres espèces, que nous invitons nos lecteurs à faire eux-mêmes ; ils se refuseront d'autant moins à cet utile travail, qu'ils seront sûrs de trouver dans les résultats des réponses satisfaisantes à toutes les questions que l'on peut proposer sur le jet des bombes.

Dans ce tableau chaque case, excepté celles des vitesses, renferme deux nombres, dont l'inférieur est donné immédiatement par le calcul de la partie variable de nos formules ; en les ajoutant successivement on a les nombres supérieurs qui dans chaque colonne ont pour coefficient ou facteur commun le nombre qui est en tête de cette colonne ; & ces nombres ainsi multipliés expriment la quantité désignée au haut de la colonne. Ainsi, par exemple, dans le tableau suivant, le produit $2,302585 c \times 0,3652787$ exprime pour la branche ascendante la valeur de l'abscisse qui répond à l'inclinaison de 45 degrés, & la vitesse pour cet angle de projection est $\sqrt{2kg} \times 1,72225$.

207. Si on veut construire une de ces trajectoires pour en connoître la forme, il suffira d'employer les nombres supérieurs des cases de la troisieme & de la quatrieme colonne, qui indiquent les valeurs des abscisses & des ordonnées : le tracé de cette figure, très-facile à exécuter, auroit de plus l'avantage de faire connoître l'abscisse correspondante à une ordonnée quelconque donnée, & suppléeroit le calcul des interpolations qui ne laisse pas d'être compliqué. La figure 35 représente la trajectoire de la troisieme espece; elle est construite sur une échelle telle que si on divise par 8 le nombre des pouces de chaque dimension de la figure, & qu'on multiplie le quotient par 2,302585 c, on aura la dimension réelle en pieds. On pourroit aussi, sur le même axe, construire la courbe des vitesses, & celle des temps; mais elles ne seroient pas d'une grande utilité pour la pratique.



TABLE XIII.

208. De la première espèce de trajectoire des bombes.

Branche ascendante.

Incli. en N	Arc AN 2,302585.c	Absc. AQ 2,302585.c	Ord. QN 2,302585.c	Vitesse en N $\sqrt{2kg}$	Tem. par AN 2,302585. $\sqrt{c}$ $\sqrt{2kg}$
0 ^d	0,000000 21398	0,000000 21378	0,000000 933	0,74083	0,000000 28473
5	0,021398 23045	0,021378 22848	0,000933 3008	0,76221	0,028473 29659
10	0,044443 25535	0,044226 24929	0,003941 5527	0,79175	0,058132 31465
15	0,069978 29165	0,069155 27815	0,009468 8770	0,83133	0,089597 34011
20	0,099143 34531	0,096970 31902	0,018238 13214	0,88369	0,123608 37593
25	0,133674 42654	0,128872 37834	0,031452 19695	0,95340	0,161201 42625
30	0,176328 55574	0,166706 46871	0,051147 29861	1,04796	0,203826 49863
35	0,231902 77856	0,213577 61768	0,081008 47396	1,18113	0,253689 60764
40	0,309758 121981	0,275345 89934	0,128404 82409	1,38146	0,314453 78604
45	0,431739 238100	0,365279 160858	0,210813 175545	1,72225	0,393057 112995
50	0,669839	0,526137	0,386358	2,49209	0,506052

SUITE DE LA TABLE XIII.

Branche descendante.

Incli. en M	Arc A M. 2,302585.c	Abf. AP 2,302585.c	Ord. PM. 2,302585.c	Vitesse en M $\sqrt{2kg}$	Tem. par A M 2,302585. $\sqrt{c}$ $\sqrt{2kg}$
0 ^d	0,000000 20393	0,000000 20374	0,000000 896	0,74083	0,000000 27799
5	0,020393 19921	0,020374 19796	0,000890 2600	0,72640	0,027799 27581
10	0,040314 19930	0,040170 19457	0,003490 4314	0,71814	0,055380 27802
15	0,060244 20413	0,059627 19468	0,007804 6138	0,71557	0,083182 28469
20	0,080657 21405	0,079095 19775	0,013942 8191	0,71846	0,111651 29621
25	0,102052 22990	0,098870 20393	0,022133 10616	0,72679	0,141272 31331
30	0,125052 25310	0,119263 21347	0,032749 13599	0,74073	0,172603 33717
35	0,150362 28597	0,140610 22687	0,046348 17409	0,76063	0,206320 36955
40	0,178959 33213	0,163297 24487	0,063757 22438	0,78702	0,243275 41319
45	0,212172 39739	0,187784 26847	0,086195 29298	0,82063	0,284594 47224
50	0,251911 49120	0,214631 29902	0,115493 38969	0,86237	0,331818 55325
55	0,301031 62935	0,244533 33815	0,154462 53079	0,91330	0,387143 66677
60	0,363966 84101	0,278348 38833	0,207541 74598	0,97446	0,453820 83229
65	0,448067 117854	0,317181 45101	0,282139 108883	1,04649	0,537049 108345
70	0,565921	0,362282	0,391022	1,12903	0,645394

(*) En examinant dans ce tableau la colonne des vitesses dans la

209. Pour faire usage de ce tableau, il faut connoître les valeurs des quantités qui sont en tête de chaque colonne, relativement aux différentes espèces de bombes: on les trouvera dans la table suivante, dans laquelle on a supposé $k = 1$.

branche descendante, on voit qu'arrivé au sommet de la courbe, le projectile n'a point encore atteint sa plus petite vitesse, & que ce n'est qu'après avoir parcouru un certain espace en descendant, que cette vitesse est un minimum. La cause de cette singulière propriété ne peut être attribuée qu'à la résistance de l'air, puisque dans le vuide, c'est au sommet de la courbe, alors parabolique, que la vitesse du mobile est la plus petite: en effet, lorsque dans l'air il est arrivé à ce sommet où sa direction est horizontale, la vitesse peut encore être diminuée par la résistance du fluide, sans le concours de la pesanteur; & comme pendant les premiers instans suivans l'action de la pesanteur est moindre que celle de la résistance de l'air, la vitesse, par cette dernière cause, continue de décroître, & ne parvient à son minimum qu'à une certaine distance du sommet de la trajectoire, où l'on a $p = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{16n}$, à peu près.

Il en est de même & par la même raison du rayon de courbure: ce n'est point au sommet qu'il est le plus petit, mais dans la branche descendante, au point où $p = \frac{1}{3\pi}$. De là il est clair qu'il y a une espèce de trajectoire où le point de la moindre vitesse & celui de la plus grande courbure peuvent coïncider; que dans celles qui ont n plus petit, le premier est plus près du sommet de la courbe que le second, & au contraire, quand n est plus grand, ce qui arrive dans les douze espèces que nous considérons pour le jet des bombes; mais il suffit d'avoir remarqué cette propriété qui n'est qu'un objet de curiosité, sans utilité pour la pratique.

TABLE XIV.

ES P È C E S des bombes.	Log. de 2,302585. c	Log. de $\sqrt{2cg}$	Log. de 2,302585 $\sqrt{\frac{c}{2g}}$
de 12 po. ^{l.} pefant $\left\{ \begin{array}{l} 182\frac{1}{2} \\ 180 \\ 175 \\ 150 \end{array} \right.$	4,3574986	2,7326449	1,6148536
	4,3417463	2,7297688	1,6119775
	4,3112892	2,7145402	1,5967489
	4,2565651	2,6871782	1,5693868
de 10.....	4,2352880	2,6765396	1,5587483
de 8.....	4,0517819	2,5847866	1,4669953

210. Cela posé, s'il est question de connoître toutes les circonstances du mouvement d'une bombe projetée sous un angle donné, par exemple sous l'angle de 45 degrés qui est le plus usité, & qu'il s'agisse de la première espèce de trajectoire à parcourir par une bombe de 12 po. pefant 180 livres; on voit d'abord qu'il faut imprimer à la bombe une vitesse initiale exprimée par $1,72225 \times$

$\sqrt{2cg} = 924,41$ ^{pi.}; ce que l'on trouve facilement en ajoutant le log. de 1,72225, avec celui de $\sqrt{2cg}$ donné dans la dernière table.

La portion de l'amplitude horizontale qui répond à la branche ascendante, est $0,365279 \times 2,302585. c =$ ^{pi.} ^{to.} $8023,6 = 1337,26$.

Le temps employé à parcourir la branche ascendante jusqu'au sommet de la courbe est $0,393057 \times \frac{2,302585 \sqrt{c}}{\sqrt{2g}} = 16'',085$.

Enfin, la plus grande hauteur du jet est 0,210813
 $\times 2,302585.c = 4630,7 \overset{\text{pi.}}{=} 771,6 \overset{\text{to.}}{.}$

A l'égard de la branche descendante, si la projection se fait sur un terrain horizontal, elle doit avoir la même hauteur, ou la même ordonnée 0,210813 que la branche ascendante : on cherchera donc dans le tableau de cette branche descendante l'abscisse qui répond à l'ordonnée 0,210813 ; on voit qu'elle est entre les angles de 60 & 65 degrés, & on trouvera par la méthode des interpolations que cette abscisse est 0,280666, & répond à un angle de 60° 15' ; que la vitesse au point de chute est représentée par 0,97480 ; & le temps employé à parcourir la branche descendante, par 0,457814. Ces nombres étant multipliés par leurs coefficients respectifs, on aura
 $6152,6 \overset{\text{pi.}}{=} 1025,43 \overset{\text{to.}}{.}$ pour la partie de l'amplitude de la
 branche descendante ; 523,22 $\overset{\text{pi.}}{.}$ pour la vitesse finale, & 18",835 pour le temps de la descente.

En résumant, on conclura qu'une bombe de 12 pouces, pesant 180 livres, parcourra une trajectoire de la première espèce, si elle est projetée sous l'angle de 45 degrés avec une vitesse initiale de 924,41 $\overset{\text{pi.}}{.}$;

La portée horizontale sera de 2362,7 $\overset{\text{to.}}{.}$;

La plus grande hauteur du jet sera de 771,8 $\overset{\text{to.}}{.}$;

Le temps du trajet de 34",82 ;

La vitesse finale de $523,22^{\text{pi}}$;

Et l'angle de chute de $60^{\circ} 15'$ (*).

(*) *Des interpolations.*

La méthode des interpolations est d'une si grande utilité dans les recherches physico-mathématiques, que nos lecteurs nous sauront sans doute gré de la leur faire connoître. Voici en quoi elle consiste :

Si l'on a deux séries $m, n, p, q, r, \&c.$ dont les termes se correspondent suivant une loi connue; que x soit une quantité donnée entre deux termes quelconques de l'une de ces séries, il s'agit de trouver dans l'autre la valeur de la quantité y correspondante. On aura cette valeur avec d'autant plus de précision qu'on emploiera, pour la déterminer, un plus grand nombre de termes dans chaque série; ce qui donne lieu à différentes formules.

Si on ne prend que deux termes, on supposera qu'ils sont formés faisant une loi qui donne $y = f + gx$; si on en prend trois, on supposera $y = f + gx + hx^2$; pour quatre $y = f + gx + hx^2 + kx^3$, & ainsi des autres. Si x étoit un terme de la première série, il est évident que y seroit le terme correspondant de la seconde; supposant donc x égale successivement à chaque terme employé de la série qui le renferme, on aura autant d'équations qu'il y a de ces termes employés, au moyen de quoi on trouvera la valeur des indéterminées $f, g, h, \&c.$

Soit donc dans le cas de deux termes, $x = m, x = n$, on aura les deux équations $f + gm = a; f + gn = b$ qui servent à déterminer f & g .

Dans le cas de trois termes, supposons $x = m, x = n, x = p$, on aura les trois équations $f + gm + hm^2 = a; f + gn + hn^2 = b; f + gp + hp^2 = c$, par lesquelles on déterminera f, g, h .

En opérant de même pour les autres cas, on trouvera,

211. En appliquant le calcul aux autres especes de trajectoires, & pour chaque espece de bombes, les mêmes

$$\text{Pour le 1}^{\text{er}}. y = a - \left\{ \begin{matrix} +a \\ -b \end{matrix} \right\} \frac{x-m}{n-m}.$$

$$\text{Pour le 2}^{\text{e}}. y = a - \left\{ \begin{matrix} +a \\ -b \end{matrix} \right\} \frac{x-m}{n-m} + \left\{ \begin{matrix} +a(p-n) \\ -b(p-m) \\ +c(n-m) \end{matrix} \right\} \frac{(x-m)(x-n)}{(n-m)(p-m)(p-n)}.$$

$$\text{Pour le 3}^{\text{e}}. y = a - \left\{ \begin{matrix} +a \\ -b \end{matrix} \right\} \frac{x-m}{n-m} + \left\{ \begin{matrix} +a(p-n) \\ -b(p-m) \\ +c(n-m) \end{matrix} \right\} \frac{(x-m)(x-n)}{(n-m)(p-m)(p-n)} -$$

$$\left\{ \begin{matrix} +a(p-n)(q-n)(q-p) \\ -b(p-m)(q-m)(q-p) \\ +c(n-m)(q-m)(q-n) \\ -d(n-m)(p-m)(p-n) \end{matrix} \right\} \frac{(x-m)(x-n)(x-p)}{(n-m)(p-m)(q-m)(p-n)(q-n)(q-p)}.$$

Ces formules seroient plus simples si les premiers termes m , a des deux séries étoient $= 0$; pour les ramener à cet état, il suffit de retrancher ces premiers termes de chacun des autres; on peut même, s'ils ont un facteur commun, le supprimer, sauf à le restituer par la multiplication dans le résultat, ainsi que le terme retranché, par l'addition; ce qui change ces formules en celles-ci, où l'on a conservé les mêmes dénominations n , p , q , &c. b , c , d & x , aux termes réduits. Premier cas, $y = \frac{bx}{n}$; second cas,

$$y = \frac{bx}{n} - \left\{ \begin{matrix} +pb \\ -nc \end{matrix} \right\} \frac{x(x-n)}{p-n}; \text{ troisième cas, } y = \frac{bx}{n}$$

$$- \left\{ \begin{matrix} +pb \\ -nc \end{matrix} \right\} \frac{x(x-n)}{p-n} + \left\{ \begin{matrix} +bpq(q-p) \\ -cpq(q-n) \\ +dnp(p-n) \end{matrix} \right\} \frac{x(x-n)(x-p)}{npq(p-n)(q-n)(q-p)}.$$

Pour donner quelques exemples de l'usage de ces formules, appliquons-en le calcul à la recherche de l'ordonnée de la branche descendante, qui répond à l'ordonnée 0,210814 de la branche ascendante: on prendra les quatre demi-termes de la colonne des ordonnées de la branche descendante dans la Table XIII, dont les deux premiers sont au-dessus, & les deux autres au-dessous de

procédés ont donné les résultats rapportés dans la table suivante, où l'on s'est borné aux trajectoires qui conviennent

l'ordonnée proposée : on prendra aussi les termes correspondans dans la colonne des abscisses, pour avoir deux séries, dans chacune desquelles on retranchera le premier terme de chacun des trois autres, & de plus celui de la première série de l'ordonnée proposée 0,210814, ce sera x ; au moyen de quoi on pourra employer les dernières formules, comme il suit.

S É R I E S

Primitives.

Réduites.

$$0,154462 \quad 0.$$

$$0,207541 \quad 0,053079 = n \quad 0,074598 = p - n$$

$$0,282139 \quad 0,127677 = p \quad 0,183481 = q - n$$

$$0,391022 \quad 0,236560 = q \quad 0,108883 = q - p$$

$$0,244533 \quad 0.$$

$$0,278348 \quad 0,033815 = b \quad 0,056352 = x$$

$$0,317182 \quad 0,072649 = c \quad 0,003273 = x - n$$

$$0,362282 \quad 0,117749 = d \quad 0,071326 = -(x - p).$$

Substituant ces valeurs dans la formule du troisième cas, on trouvera pour résultat le nombre 0,036133, auquel ajoutant 0,244533 qui a été retranché des termes de la seconde série, on aura 0,280666 pour l'abscisse correspondante à l'ordonnée 0,210814.

Pour trouver l'angle que cette abscisse fait avec la courbe, on prendra la même série primitive 0,154462, &c. avec les quantités qui en dépendent, & pour la seconde les angles correspondans 55° , 60° , 65° , 70° , qu'on réduira, en retranchant le premier terme 55° , à 0, 5, 10, 15; & comme ces derniers nombres ont 5 pour facteur commun, on aura, en divisant par 5, la série réduite $1=b$; $2=c$; $3=d$. Substituant ces valeurs en conservant les autres, on aura

aux différentes bombes, selon l'usage qu'on en fait ordinairement dans la pratique du service de guerre.

T A B L E X V.

De la projection des bombes sous l'angle de 45°.

Espece de courbe.	Vitesse initiale.	Portées horizont.	Hauteur du jet.	Temps du trajet.	Vitesse finale.	Angle de chûte.
Bombe de 12 po. pesant 180 livres.						
1	924	2363	772	34,82	523	60—16
2	812	2036	642	31,77	499	58—16
3	721	1756	537	29,11	473	56—30
4	644	1512	449	26,65	448	54—56
5	578	1295	375	24,39	422	53—33
6	519	1106	313	22,28	397	52—18

le nombre 1,05047 qu'il faut multiplier par 5, & ajouter 55 au produit, ce qui donnera 60° 15' pour l'angle demandé.

Souvent, & sur-tout dans le cas du tir des mortiers, on a une valeur suffisamment exacte en négligeant le troisieme terme de la formule, ou, ce qui revient au même, en n'employant que trois termes des séries primitives, & c'est ce que nous avons fait dans l'usage des trois dernieres Tables.

SUITE DE LA TABLE XV.

Espece de courbe.	Vitesse initiale.	Portées horizont.	Hauteur du jet.	Temps du trajet.	Vitesse finale.	Angle de chute.
Bombe de 12 po. pesant 150 livres.						
1	838 ^{pi.}	1944 ^{to.}	634 ^{to.}	31,57 ["]	476 ^{pi.}	60—16
2	736	1673	528	28,80	452	58—16
3	653	1443	441	26,36	429	56—30
4	584	1243	369	24,16	406	54—56
5	524	1065	308	22,11	383	53—33
6	470	909	257	20,20	360	52—18
7	422	768	213	18,38	336	51—10
8	377	639	175	16,66	312	50—8
9	336	527	141	14,98	288	49—12
10	296	424	112	13,39	263	48—22
11.	259	333	87	11,81	236	47—41
12	223	253	65	10,30	208	47—4
Bombe de 10 po.						
3	638	1374	420	25,72	419	56—30
4	570	1183	352	23,57	396	54—56
5	511	1014	294	21,58	374	53—33
6	459	866	245	19,71	351	52—18

SUITE DE LA TABLE XV.

Espece de courbe.	Vitesse initiale.	Portées horizont.	Hauteur du jet.	Temps du trajet.	Vitesse finale.	Angle de chûte.
Suite de la bombe de 10 po.						
7	412	731	203	17,94	328	51—10
8	368	608	166	16,25	304	50—8
9	327	501	135	14,61	281	49—12
10	289	404	107	13,06	257	48—22
11	252	317	83	11,52	230	47—41
12	217	241	62	10,05	203	47—4
Bombe de 8 po.						
5	414	665	193	17,46	303	53—33
6	371	567	161	15,96	284	52—18
7	333	479	133	14,53	265	51—10
8	298	399	109	13,16	245	50—8
9	265	329	88	11,83	228	49—12
10	234	265	70	10,59	208	48—22
11	204	208	54	9,33	186	47—41
12	176	158	41	8,14	164	47—4

212. Il ne s'agit plus, pour compléter cette table,

que de connoître l'agent qu'il faut employer pour imprimer à chaque espece de bombes une vitesse donnée : mais cette connoissance, qui porteroit l'art de jeter les bombes à son plus haut degré de perfection, présente de trop grandes difficultés pour qu'on puisse se flatter de l'avoir acquise ; si pour le canon, où l'expansion du fluide moteur & le mouvement du mobile se font dans un même canal cylindrique, où le mobile pose immédiatement sur la charge de poudre, on n'a pu encore parvenir qu'à des formules de vitesses dont les résultats sont communément démentis par l'expérience, que sera-ce du mortier qui présente des circonstances bien plus compliquées que le canon ! Ce qu'il y a principalement à considérer, c'est, 1°. que dans le mortier la capacité de la chambre n'étant pas toujours remplie par la charge de poudre, il faut avoir égard non-seulement à la pression du fluide élastique contre la bombe, mais aussi au choc qu'il exerce contre elle. 2°. Cette pression & ce choc ne s'exercent point contre une demi sphere, comme dans le canon, mais contre un segment sphérique, ce qui doit modifier l'action de la poudre selon le rapport du diamètre de la chambre au diamètre de la bombe. 3°. Passé l'instant du choc & de la première pression, l'expansion du fluide élastique de la poudre se fait dans un canal en partie sphérique ou conique, & en partie cylindrique, ce qui empêche l'uniformité dans les progrès de cette expansion. 4°. On ne peut se dispenser de connoître la manière dont la poudre agit & tend à accélérer le mouvement du projectile : cette connoissance tient essentiellement à la succession de l'inflammation & du développement du fluide moteur ; développement qui a lieu & s'établit d'autant plus com-

plètement dans la charge de poudre , avant que le mobile soit ébranlé , que celui-ci oppose par sa masse & l'inclinaison du mortier une plus grande & plus longue résistance à l'expansion du fluide. 5°. Comme on ne peut douter de l'influence de la chaleur sur la force élastique du fluide moteur , il faut aussi connoître la loi qu'elle observe dans la diminution & les variations de son intensité , à mesure que le fluide s'étend dans un plus grand espace , & selon que la charge est plus ou moins grande. 6°. Enfin , & généralement pour tous les cas où la poudre est employée , on ne peut estimer ses effets qu'on ne connoisse la force absolue qu'une certaine quantité de poudre est capable d'exercer contre un obstacle donné , ou , ce qui revient au même , le rapport de cette force à la pression de l'atmosphère , en la déduisant des propriétés chimiques bien constatées des différentes substances qui composent la poudre.

213. Tels sont les matériaux qui doivent servir de base à la théorie des effets de la poudre , pour en conclure une formule des vitesses qui satisfasse à tous les cas ; formule qui , dans sa plus grande généralité , sera applicable au mortier , & au canon dans un cas particulier. Quoique nous sentions toute la difficulté d'une pareille entreprise , nous ne désespérons point que , mis en œuvre par une main habile , on ne parvienne à soumettre ces matériaux à une analyse exacte : c'est à l'un de ces heureux génies qui , selon l'expression de M. de Luc , réunissent le pouvoir mathématique à une forte attention aux phénomènes , qu'est sans doute réservée la solution de ce problème , vraiment digne de leurs talens & de toute leur attention.

214. Quelque soit le succès de cette théorie , il y a

toute apparence que le calcul donnera pour la vitesse initiale du projectile une expression qui sera une fonction de la charge de poudre combinée avec des dimensions invariables du mobile & de l'arme à feu ; & cette fonction sera un radical du second degré , parce que la formule différentielle $v dv = f dx$ des mouvemens variés ne peut donner pour la vitesse v qu'une quantité radicale, quelle que puisse être la valeur & la nature de la force f . C'est ce qui nous a fait admettre l'analogie des quarrés des vitesses en raison des charges dans l'instruction sur l'usage de nos tables du tir des canons & obusiers , en recommandant néanmoins de ne l'employer que pour comparer deux charges dont la différence ne seroit pas trop considérable ; & si nous avons dit aussi que les quarrés de ces mêmes vitesses sont en raison inverse du poids des projectiles , c'est que dans la valeur de f la masse du mobile entre nécessairement comme diviseur ; d'où naît l'analogie $V^2 : v^2 :: \frac{C}{P} : \frac{c}{p}$, dans laquelle V , v représentent les vitesses communiquées par les charges C , c aux projectiles dont les poids sont P , p . Voilà ce que la théorie a fourni jusqu'à présent de plus positif, quoique très-insuffisant.

215. Voyons donc si l'expérience nous instruira mieux que la théorie, des effets de la poudre dans le mortier : dans le grand nombre d'épreuves faites à diverses époques pour connoître les résultats du tir des mortiers, il en est peu dont on puisse tirer un parti utile pour la pratique, la qualité des poudres qui y ont été employées n'ayant point été spécifiée, non plus que d'autres circonstances qui influent sur les portées. Celles de La Fère en 1771

n'ont eu d'autre objet que de connoître les portées qu'on obtient avec la même charge de poudre de 3 liv. 12 onc. dans le mortier de 12 poudres, & sous différens angles d'inclinaison ; elles n'ont été entreprises que pour constater la théorie du mouvement des projectiles établie par Bézout dans son cours de mathématiques : l'objet est rempli à cet égard, mais on n'en peut rien conclure pour l'effet d'autres charges & avec d'autres mortiers.

216. Nous ne connoissons que les épreuves faites à l'École d'Auxonne en 1786, où l'on ait eu égard à toutes les circonstances de pratique : elles sont rapportées à la fin de nos tables du tir des canons & obusiers. Si l'usage des éclisses pour assujettir la bombe a pu occasionner quelques irrégularités, elles n'échapperont point à des yeux clairvoyans, qui sauront bien les rectifier : car dès que les charges suivent une certaine loi, il doit aussi en régner une quelconque dans les vitesses qui en résultent au projectile, par conséquent dans les portées qu'on en obtient : le moindre écart de cette loi quelconque annonce une irrégularité, dont la cause peut quelquefois être sentie, mais qu'il est le plus souvent impossible de prévoir. Quoique nos épreuves d'Auxonne ne soient point à l'abri de tout reproche d'irrégularité, elles peuvent cependant utilement servir à faire connoître les charges qu'il faut employer pour obtenir des portées données. Nous allons en extraire ce qui concerne la projection sous l'angle de 45 degrés, & en nous servant des tables précédentes, nous en concluons par la méthode des interpollations les vitesses résultantes des charges employées dans les épreuves, comme on le voit dans la table suivante. Le

rapport du volume de la charge à la capacité de la chambre, pouvant &c devant même influer sur la vitesse initiale de la bombe, nous avons ajouté une colonne où ce rapport est indiqué, la capacité de la chambre prise au dessous de la bombe étant exprimée par l'unité.

217. TABLE XVI.

Des vitesses communiquées à chaque espèce de bombes par différentes charges de poudre, dont la qualité est de 104 toises, l'angle de projection étant de 45 degrés.

CHARGES de poudre.	RAPPORT des charges à la chambre.	PORTÉES horizontales.	VITESSES initiales.
Bombe de 12 po. pesant 145 livres.			
Chambre { profondeur { totale 5 po. 6 li. 			

SUITE DE LA TABLE XVI.

CHARGES de poudre.	RAPPORT des charges à la chambre.	PORTÉES horizontales.	VITESSES initiales.
Bombe de 10 po. pesant 104 livres.			
Chambre { profondeur { totale 8 po. 3 li. { sous la bombe 7,326 { diamètre 5 6			
l. on.		to.	pi.
1 "	0,153	227,5	210
1 8	0,230	395,5	288
2 "	0,307	530,5	347
2 8	0,383	645,5	382
3 "	0,460	755,5	420
4 "	0,613	1028	515
5 "	0,767	1073,5	531
6 2 $\frac{1}{2}$	1,000	1048	523
Même bombe de 10 po. pesant 104 livres.			
Chambre { profondeur { totale 6 po. 9 li. 1 pt. { sous la bombe 6,222 { diamètre 4 6 1			
l. on.		to.	pi.
1 "	0,272	310	248
1 8	0,409	480	321
2 "	0,545	615,5	370
2 8	0,681	697,5	402
3 "	0,817	704	438
3 10 $\frac{1}{4}$	0,992	879,75	463
3 10 $\frac{1}{2}$	1,000	893	468

SUITE DE LA TABLE XVI.

CHARGES de poudre.	RAPPORT des charges à la chambre.	PORTÉES horizontales.	VITESSES initiales.
Bombes de 8 po. pesant 44 livres.			
Chambre { profondeur { totale 5 po. 6 li. 1 pt. { sous la bombe 4,745 { diametre 2 10			
on.		to.	pi.
5	0,25	165,5	180
10	0,50	394,5	296
15	0,75	577	379
20	1,00	641	402

218. Il est visible que ces portées ne suivent , dans leurs progrès , aucune loi régulière , telle qu'on devoit l'attendre de celle qui regne dans les charges qui les ont produites : tandis que celles-ci prennent des accroissemens égaux , les autres , toutes choses d'ailleurs égales , devroient aussi augmenter , mais avec des différences décroissantes. Quoique ce caractère manque aux résultats de nos épreuves , il ne sera pas difficile de les y ramener , si l'on considère que parmi les portées obtenues avec la même charge , celle-là approche le plus d'être la véritable : qui est la plus longue ; car il n'est pas douteux que si l'effet d'une charge est altéré par quelque cause que ce soit , ce ne peut être qu'en moins , si ce n'est peut-être dans le cas où par certains accidens la bombe seroit obligée de suivre une autre

direction que celle du mortier. Il n'est pas moins évident que, si parmi plusieurs portées résultantes de la même charge, il s'en trouve d'égales, ou à-peu-près égales entr'elles, elles doivent être regardées comme étant le véritable effet de cette charge : cette présomption est fondée sur cette autre, qu'il n'est point vraisemblable que, quand une cause est soumise à des accidens, il n'y ait des variations dans ses effets. Cela posé, on trouve dans les résultats de nos épreuves des points fixes d'où l'on peut partir pour rectifier les irrégularités qu'on y apperçoit. En allongeant des portées trop courtes, en conservant celles qui, par les raisons que l'on vient de déduire, paroissent avoir été obtenues sans le concours d'aucun accident, on établira entr'elles la loi dont elles se sont écartées dans les épreuves, & pourront ainsi servir de prototypes dans la pratique ; on pourra donc, à la place de la dernière table, substituer celle-ci, & l'employer avec confiance pour régler les charges qui conviennent à des portées données, & réciproquement.



TABLE XVII.

Des vitesses & des portées rectifiées, résultantes de différentes charges de poudre à chaque espèce de bombes ; l'angle de projection étant de 45 degrés, & la poudre de 104 toises.

Charges.	Portées.	Vitesse.	Charges.	Portées.	Vitesse.
<i>Mortier de 12 po.</i>			<i>Mortier de 10 po. à grande chambre.</i>		
l.	to.	pi.	l. on.	to.	pi.
1	197	197	1	230	212
1 $\frac{1}{2}$	346	264	1 8	412	292
2	462	311	2	568	352
2 $\frac{1}{4}$	569	352	2 8	690	397
3	647	380	3	802	436
3 $\frac{1}{2}$	710	402	4	1035	518
<i>Mortier de 10 po. à petite chambre.</i>			5	1139	551
l. on.	to.	pi.	6 2 $\frac{1}{2}$	1200	586
1	311	249	<i>Mortier de 8 po.</i>		
1 8	482	322	on.	to.	pi.
2	640	380	5	173	184
2 8	764	424	10	397	297
3	860	459	15	587	380
3 10 $\frac{1}{2}$	960	492	20	642	403

219. Les portées & les vitesses de cette table étant relatives à une espèce de poudre, dont la qualité est indiquée par la portée de 104 to. au mortier d'épreuve,

on ne peut l'employer utilement dans la pratique qu'autant que l'on connoitra la qualité des poudres dont on est dans le cas de se servir : il faudra donc savoir quelles sont les vitesses qui résultent de différentes especes de poudre, comparativement à celle que communique la poudre de 104 toises, ce que l'on trouvera, s'il s'agit, par exemple, d'une poudre de 120 toises, par l'analogie suivante : la racine quarrée de 104, est à celle de 120, comme la vitesse résultante de la premiere espece de poudre pour chaque charge, est à la vitesse résultante de la seconde avec la même charge. (Voyez les art. 57 & 174). C'est sur ce principe qu'a été calculée la table suivante, qui indique les vitesses communiquées par différentes charges, avec quatre especes de poudre; savoir : de 90, 100, 110 & 120 toises, auxquelles on a cru pouvoir se borner, parce qu'il est facile d'en déduire les vitesses qui proviendroient des qualités intermédiaires.



TABLE XVIII.

Des vitesses des bombes résultantes de différentes charges de poudre, dont la qualité est indiquée par les portées du mortier à éprouver les poudres, chargé de 3 onces.

ESPECES de mortier.	CHARGES de poudre.	Portées du mortier d'épreuve.			
		to. 90	to. 100	to. 110	to. 120
		Vitesse initiale des bombes.			
	1. on. 1 pi.				
de 12 po.	1 " 183	193	203	213	
	1 " 8 246	259	272	284	
	2 " 289	305	320	334	
	2 " 8 327	345	362	378	
	3 " 368	387	406	425	
	3 " 8 374	394	413	432	
de 10 po. à grande chambre.	1 " 197	208	218	228	
	1 " 8 271	286	300	313	
	2 " 327	345	362	378	
	2 " 8 369	389	408	426	
	3 " 407	429	449	469	
	4 " 482	508	535	556	
de 10 po. à petite chambre.	5 " 511	539	565	591	
	6 " 2 545	575	604	629	
	1 " 237	250	262	274	
	1 " 8 300	316	331	346	
	2 " 353	373	391	408	
	2 " 8 394	416	436	455	
de 8 po.	3 " 427	450	472	493	
	3 " 10 458	482	506	528	
de 8 po.	5	171	180	189	198
	10	276	291	305	319
	15	353	373	391	408
	20	375	395	414	433

220. Terminons par quelques applications des dernières tables, à la pratique du jet des bombes, & voyons d'abord quelle doit être la charge du mortier de 12 pouces, pour que la portée soit de 500 toises, avec de la poudre de 115 toises? On trouve par la table XV, que pour la bombe de 12 po. pesant 150 l., la portée de 500 toises suppose une vitesse initiale de 325,69^{pi.}, qui est entre les deux vitesses 278 & 327, relatives, dans la table XVIII, à la poudre de 115 toises, & résultantes des charges de $1\frac{1}{2}$ & 2 l.; or, on trouve par la méthode des interpollations, que cette vitesse provient d'une charge de 1 l. 15 on. 6 gr. C'est donc avec cette charge qu'il faut tirer le mortier de 12 po. sous l'angle de 45 degrés, pour avoir la portée de 500 toises, la poudre étant de 115 toises.

Si c'est avec de la poudre de 104 toises qu'on veut obtenir la même portée de 500 toises, on trouve par la table XVII, qu'il faut une charge de 2 l. 4 on. 7 gr.

On demande quelle sera la portée du mortier de 10 po. à petite chambre, la charge étant de 2 l. d'une poudre de 120 toises? La table XVIII fait voir qu'avec cette charge & cette qualité de poudre, la vitesse initiale est de 408 pi., qui répond, dans la table XV, à une portée de 720 toises.

Les autres applications que l'on peut faire de ces tables sont trop faciles pour nous y arrêter. D'ailleurs, nous nous proposons de donner, d'après la même théorie, un traité purement graphique du jet des bombes, au moyen duquel il suffira d'employer le compas & un calcul très-simple, pour résoudre toutes les questions concernant cette partie de la balistique.

Des causes d'irrégularités dans le tir des mortiers.

221. Une cause d'irrégularité toujours existante dans le mortier, c'est le vent de la bombe, ou la différence entre son diamètre & celui de l'ame du mortier : cette différence, dans l'état primitif de l'arme, est, pour chaque calibre, de 1 li. 6 pts. ; de sorte que, quand même la bombe seroit placée centriquement dans le mortier, elle pourroit s'écarter de la direction de l'axe d'environ 9 points, pendant qu'elle parcourt la partie cylindrique de l'ame, & sans qu'il y ait de choc contre les parois ; c'est-à-dire, qu'arrivée à la bouche du mortier, cet écart de la bombe pourra être d'un 192° . de la partie cylindrique pour le mortier de 12 po. ; d'un 160° . pour le 10 po., & d'un 128° . pour le 8 po. ; abstraction faite de l'enfoncement de la bombe dans la chambre. Si l'écart a lieu dans le sens horizontal, ce sera dans le même rapport avec la portée que la bombe déviara à droite ou à gauche de la vraie direction.

Si, comme il arrive le plus fréquemment, cet écart se fait dans le sens vertical, & que l'on tire sous l'angle de la plus grande portée, ou à peu près, il n'en résultera aucun changement sensible à la portée ; parce qu'en général les quantités qui avoisinent un *maximum* n'en diffèrent point sensiblement. C'est par cette raison aussi que, quand on tire sous un tel angle, ce seroit perdre inutilement un temps précieux de vouloir donner le degré avec précision ; un degré de plus ou de moins ne pouvant dans ce cas produire d'erreurs remarquables dans la portée.

Si, avant de sortir du mortier, la bombe rencontre les

parois de l'ame, la déviation pourra être plus considérable, en raison inverse de l'espace qu'elle aura parcouru à l'instant du choc, comparativement à la longueur de la partie cylindrique de l'ame : c'est-à-dire, que si cet espace est, par exemple, le tiers de la partie cylindrique, la déviation pourra être triple, si le choc est latéral, de ce qu'elle étoit dans le premier cas; elle sera à peu près la même que si cette partie cylindrique étoit réduite au tiers de sa longueur, ou si elle se terminoit à l'endroit du choc. Dans le cas où cet accident arriveroit dans le sens vertical, il faudroit que la direction de la bombe fût élevée ou abaissée de plusieurs degrés, pour que la longueur de la portée en reçût un changement notable.

La maniere de se servir du quart de cercle pour pointer le mortier, peut aussi influer sur la direction des bombes & produire des erreurs : si l'instrument qu'on emploie porte un fil à plomb pour indiquer le plan vertical du mortier, il est clair qu'une erreur quelconque dans le parallélisme entre le fil & ce plan, occasionnera dans celui-ci une déviation dont le rapport à la portée sera le même que celui du défaut de parallélisme à la longueur du fil. Et si en outre cet instrument est garni d'une alidade, à travers laquelle il faut viser pour diriger le plan vertical du mortier sur l'objet qu'on veut battre, il pourra se faire que le rayon visuel passant par la fente de la pinnule, ne la partage point en deux également; d'où, à raison de l'épaisseur de l'alidade, il résultera une erreur qui influera dans le même rapport sur la direction de la bombe.

Parmi les causes d'irrégularités auxquelles le tir des

bombes est sujet, il en est une, le vent ou l'air agité, dont l'effet est quelquefois assez sensible pour mériter quelque attention : il est certain qu'un mobile qui traverse l'air doit y éprouver des variations, non-seulement à raison de la résistance que l'air oppose à son mouvement, mais encore à cause de l'impulsion qu'il y reçoit si ce fluide est lui-même en mouvement.

L'impulsion continuelle du vent contre une surface doit lui communiquer d'instant en instant de nouveaux degrés de vitesse ; de même que la pesanteur en communique aux graves dans leur chute : c'est une force accélératrice analogue à la pesanteur, & qui produiroit sur les corps qu'elle sollicite au mouvement, exactement les mêmes effets que la pesanteur si elle étoit équivalente au poids de ces corps ; sinon, on pourra dire que le poids du mobile sollicité au mouvement par l'impulsion du vent, est au poids équivalente à la force de cette impulsion, comme l'effet de la pesanteur, ou l'espace qu'elle feroit parcourir dans un certain temps, est à l'effet de l'impulsion du vent, ou l'espace qu'il feroit parcourir dans le même temps. Si c'est un corps sphérique qui est exposé à cette impulsion, il en résultera la même force que contre la surface du grand cercle de la sphere. Soit donc C ce grand cercle ; P le poids du corps ; f la force d'impulsion du vent ; E l'espace qu'elle fait parcourir dans le temps t ; & h la hauteur de la chute des graves dans le même temps, on aura $f \times C$ pour la force exercée contre la surface C ; par conséquent $E = \frac{f \times C}{P} \times h$.

Pour employer cette formule à la recherche de la déviation des bombes par l'action du vent, il faut con-

noître le poids de la bombe pour avoir P , & son diamètre pour en déduire la valeur de C ; la première des deux tables suivantes indique les valeurs de f , relativement aux différentes vitesses du vent, ou la force de son impulsion contre une surface d'un pied carré. La seconde table donne les valeurs de h , ou la hauteur de la chute des graves pendant le temps indiqué dans la première colonne; on trouve ce temps par la table XV, lorsqu'on connoît la portée sous l'angle de 45 degrés. À l'égard de la vitesse du vent, nous renvoyons aux ouvrages de physique pour la manière de la mesurer.

T A B L E X I X.

Force d'impulsion directe du vent contre une surface d'un pied carré.

Vitesse du vent.	Force d'impulsion.	Vitesse du vent.	Force d'impulsion.	Vitesse du vent.	Force d'impulsion.
pi.	liv.	pi.	liv.	pi.	liv.
5	0,035	25	0,875	45	2,835
10	0,140	30	1,260	50	3,500
15	0,312	35	1,715	55	4,235
20	0,560	40	2,240	60	5,000



TABLE XX.

Hauteur de la chute des graves.

Temps.	Chûtes.	Temps.	Chûtes.	Temps.	Chûtes.
sec.	pi.	sec.	pi.	sec.	pi.
1	15,1	12	2172	24	8688
2	60,4	14	2956	26	10196
4	241,6	16	3861	28	11825
6	543,6	18	4888	30	13575
8	965	20	6033	32	15445
10	1508	22	7300	34	17436

Soit par exemple une bombe de 12 po. pesant 150 liv. tirée sous l'angle de 45 degrés, & portée à 600 toises par un vent dont la vitesse est de 40 pieds, & dirigé perpendiculairement à la ligne de tir : le diamètre de la bombe étant de 0,98611^{pi.}, la surface de son grand cercle est de 0,76373 de pied carré ; la vitesse du vent étant de 40 pieds, donne une force d'impulsion de 2,24 contre un pied carré, donc $f \times C = 1,7107$. La table XV fait voir que pour une portée de 600 toises, le temps du trajet est d'environ 16 secondes, ce qui donne $h = 3861$ pi. Donc $E = \frac{f \times C}{p} \times h = 44,035$ ou 7,339^{to.} ; c'est dans ce cas la déviation de la bombe. C'est aussi la quantité dont la portée est alongée ou raccourcie, si le vent pousse la bombe par-derrière ou par-devant. Enfin, si la direction du vent est oblique à la ligne de tir, la portée sera augmentée ou diminuée dans le rapport du sinus total au sinus de l'obliquité.

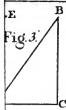


Fig. 3.

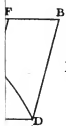
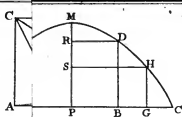


Fig. 8.

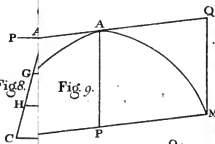


Fig. 9.

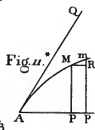


Fig. 11.*

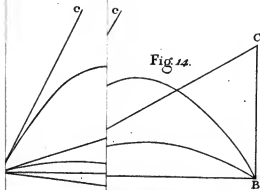


Fig. 14.



Fig. 15.

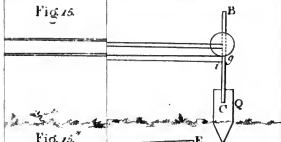


Fig. 16.

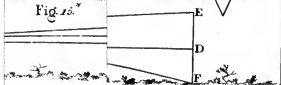


Fig. 17.

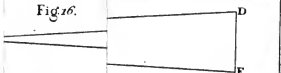


Fig. 18.

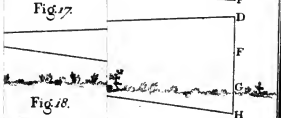
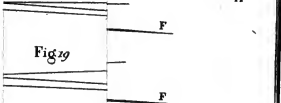


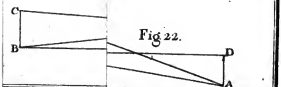
Fig. 19.



C

B

Fig. 22.





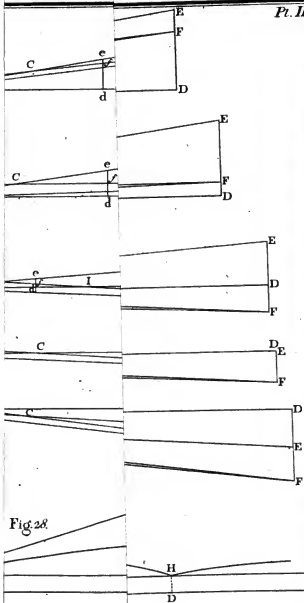


Fig. 28.

H

D



Fig. 32.

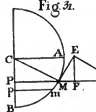


Fig. 33

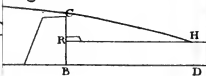


Fig.

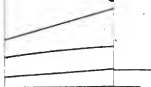


Fig. 35.



Fig. 36.

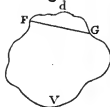
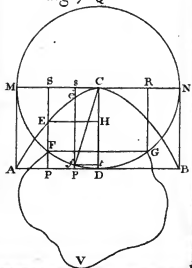


Fig. 37. Q





A P P E N D I C E.

Tout ce qui peut contribuer à donner des notions exactes touchant les effets de la poudre dans les armes à feu, devant intéresser nos lecteurs, nous ajoutons quelques réflexions que nous fîmes en 1776, à l'occasion d'une nouvelle forme proposée alors pour les chambres des mortiers, mais fondée sur des bases si contraires aux vrais principes de la physique, que nous crûmes devoir les rectifier.

Réflexions sur les chambres des mortiers.

222. La chambre d'un mortier présente deux objets à considérer : sa forme, & le diamètre de son ouverture. La première doit être telle, qu'il en résulte la plus prompte inflammation de la charge de poudre ; & de la seconde, la plus forte impulsion contre le projectile, suivant la direction de l'axe du mortier.

Pour remplir la première de ces deux conditions, il faut que toutes les parties des parois intérieures de la chambre soient le plus rapprochées qu'il est possible du centre d'inflammation, & à des distances égales de ce centre ; de sorte que les parois de la chambre devroient former la surface d'une sphere, ou portion de sphere, qui auroit pour centre le point d'où le feu est communiqué à la charge de poudre ; mais il est évident qu'à bien des égards, les chambres des mortiers ne sont point susceptibles d'une pareille configuration, & que, pour se procurer d'autres avantages plus réels, on est obligé

de renoncer à celui de la plus prompte inflammation que procureroit la forme sphérique telle qu'on vient de la considérer.

D'autres circonstances doivent donc ici être prises en considération. Examinons d'abord quelle est la maniere d'agir de la poudre enflammée. On sait que parmi les substances qui entrent dans la composition de la poudre, il en est que le feu convertit en un fluide élastique, doué d'une très-grande force expansive ; c'est dans cette propriété que consiste toute la force de la poudre. Représentons-nous ce fluide renfermé dans une capacité opposant de toutes parts une résistance invincible à son expansion : nous n'y verrons qu'un amas d'une infinité de petits tourbillons agissant & réagissant mutuellement les uns contre les autres, ayant la même tendance à s'étendre en tous sens, & également indifférens à suivre toutes les directions imaginables. Remarquons aussi que la pression de ce fluide contre les parois de la capacité qui le renferme, s'exerce perpendiculairement à la surface de chaque portion de ces parois : propriété qui lui est commune avec tous les fluides contenus dans des vaisseaux ; de là vient l'équilibre, de là résulte encore que la pression du fluide contre une seule partie quelconque des parois du vase, est équivalente aux pressions qui s'exercent contre toutes les autres parties, & en est la résultante. Cette connoissance nous est sur-tout essentielle, parce que nous n'avons à considérer que le premier effort du fluide de la poudre contre la bombe.

Cela posé, voyons ce qui arrivera lorsqu'il y aura une ouverture à un endroit quelconque du vase qui renferme le fluide élastique produit par l'inflammation de

la poudre, quelle que soit d'ailleurs la forme intérieure de ce vase : soit FVG (*fig. 36*) ce vase, & FG l'ouverture ; il est clair que le fluide s'échappera par cette ouverture, en suivant une direction perpendiculaire à la ligne droite ou à la surface plane qui joint les bords de l'orifice : car quelle qu'ait été la figure FdG de l'endroit du vase où l'on a fait l'ouverture, la somme des pressions exercées par le fluide contre FdG , est équivalente à la pression exercée par le fluide contre la droite, ou le plan FG , puisque celle-ci n'est autre chose que la résultante de toutes les pressions contre FdG . Il se formera donc par l'ouverture FG un courant qui a son principe d'activité dans la force expansive du fluide ; ce courant, tant qu'il durera, sera toujours dirigé perpendiculairement à FG ; parce que le degré de densité du fluide, qui remplit toujours toute l'étendue de la capacité FVG , peut bien influencer sur la vitesse de l'écoulement, mais non sur sa direction ; enfin, ce courant cessera d'avoir lieu, quand la densité du fluide sera réduite à celle de l'air extérieure.

Si l'on fait attention à la manière dont le fluide s'échappe par l'ouverture FG , on verra que la figure du vase ne contribue en rien à la vitesse de l'écoulement ; c'est du degré de compression où le fluide se trouve à chaque instant que dépend uniquement cette vitesse au même instant ; à mesure qu'il en sort une certaine quantité, ce qui reste encore dans le vase s'étend pour en occuper toute la capacité, & exercer contre ses parois des pressions proportionnelles à sa densité actuelle. Il en est de même de la pression du fluide contre les parois du vase entièrement fermé : elle s'exerce perpendiculairement à chaque partie des parois ; elle ne dépend que de

la force élastique du fluide, la forme du vase n'y fait rien.

Voyons maintenant quel sera l'effet de ce fluide agissant contre un corps sphérique placé sur son passage à l'ouverture du vase; soit que le diamètre de ce corps soit égal à celui de l'ouverture que nous supposerons circulaire, soit qu'étant plus grand il ne présente qu'un segment à l'action du fluide.

Soit donc le vase FVG (*fig. 37*) rempli d'un fluide élastique & actuellement comprimé, & la sphere MQND appliquée au vase par un segment FDG, dont la corde FG est égale au diamètre de l'ouverture du vase, & qui s'y adapte exactement; si on suppose le vase & la sphere tellement adhérens l'un à l'autre, qu'aucune force ne puisse les séparer, le fluide renfermé & comprimé dans la capacité FVGDF, exercera contre toutes les parties des parois du vase, des pressions qui leur seront perpendiculaires; la calotte sphérique FGD sera donc aussi pressée dans tous ses points perpendiculairement à sa surface, ou suivant des directions qui passent toutes par le centre C de la sphere; c'est donc suivant des lignes ainsi dirigées, que le fluide fait effort contre la sphere, & qu'il tend à la détacher du vase. Or il est évident que la résultante de tous ses efforts doit passer par le milieu D de la surface du segment & par le centre C; donc la sphere suivra cette direction, si elle est obligée de céder à l'action du fluide.

Examinons dans cette supposition comment l'impulsion du fluide contribue au mouvement de la sphere suivant la direction DC: chaque point *f* de la calotte étant poussé par le fluide suivant une direction *fC* passant par

le centre de la sphère, si on représente la force absolue par le rayon fC , & qu'on la décompose en deux autres, l'une fs parallèle, l'autre ft perpendiculaire à DC , il est clair que la dernière ne contribue en rien au mouvement progressif de la sphère suivant DC , étant d'ailleurs détruite par une force égale & directement opposée, qui agit sur un point pris de l'autre côté à la même distance du point D ; le point f n'est donc poussé en avant suivant DC que par la force représentée par fs ; donc la force absolue qui agit contre le point f , est à la force relative qui tend à faire mouvoir ce point parallèlement à DC , comme fC est à fs ; & comme il en est de même de tous les points qui composent la surface du segment sphérique FDG , il s'ensuit que la force absolue du fluide est à sa force relative comme la somme des rayons menés de tous les points de la calotte sphérique est à la somme de toutes les droites fs menées des mêmes points parallèlement à DC ; c'est-à-dire comme le cylindre formé par la révolution du rectangle $PDCS$ autour de DC , est au solide formé par la révolution de la figure $FDCS$ autour du même DC . Donc si la demi-sphère est exposée à l'impulsion du fluide, ces deux forces seront entre elles comme le cylindre circonscrit à la demi-sphère, est à cette demi-sphère, ou comme 3 est à 2. En général, si on nomme CS , x ; & le rayon, a ; la force absolue sera à la force relative; comme $ax^3 : \frac{2}{7} (a^3 - (a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2})$, formule qui donne le rapport de 3 à 2 lorsque $x = a$.

Si on suppose que l'impulsion du fluide renfermé dans le vase FVG , contre le segment sphérique FDG , se fait

suivant des directions parallèles à DC; hypothèse qu'admettent ceux qui confondent les fluides élastiques, dont le mouvement n'est produit que par une force expansive, avec les fluides non élastiques qui ne se meuvent qu'en vertu de la pesanteur; on trouve que la force absolue contre un point f est à la force relative, comme $fC^2 : fs^2$, ou, en décrivant une parabole qui ait son sommet en C & CD pour paramètre, comme $fC : pe$; d'où l'on conclut que la force absolue du fluide contre la surface du segment est à sa force relative, celle qui est employée au mouvement progressif de la sphère suivant DC, comme le cylindre engendré par la révolution du rectangle PDCS, est au solide formé par celle de la figure mixtiligne PDCE autour de DC; de sorte que si l'impulsion se fait contre la demi-sphère, ces deux forces seroient entre elles, comme le cylindre circonscrit est au parabololoïde de même base & de même hauteur, ou, comme 2 à 1. Faisant, comme ci-dessus, $Cs = x$, $DC = a$; dans cette hypothèse, la force absolue est à la force relative, comme $2a^2 : 2a^2 - x^2$; d'où l'on tire le rapport de 2 à 1 quand $x = a$.

Nous avons calculé la table suivante pour différentes valeurs de x , en supposant $a = 1$ & la force absolue du fluide = 1000.

$$(2a^2 - x^2) : 2a^2 :: 1000 : \text{force relative}$$

Valeurs de x.

Forces relatives.

1^{re}. hypothese.

2^e. hypothese.

$$x = \left\{ \begin{array}{ll} 0,1 & \dots\dots\dots 998 \dots\dots\dots 995 \\ 0,2 & \dots\dots\dots 990 \dots\dots\dots 980 \\ 0,3 & \dots\dots\dots 977 \dots\dots\dots 955 \\ 0,4 & \dots\dots\dots 959 \dots\dots\dots 920 \\ 0,5 & \dots\dots\dots 935 \dots\dots\dots 875 \\ 0,6 & \dots\dots\dots 904 \dots\dots\dots 820 \\ 0,7 & \dots\dots\dots 865 \dots\dots\dots 755 \\ 0,8 & \dots\dots\dots 817 \dots\dots\dots 680 \\ 0,9 & \dots\dots\dots 755 \dots\dots\dots 595 \\ 1,0 & \dots\dots\dots 667 \dots\dots\dots 500 \end{array} \right.$$

Ces deux hypotheses donnent, comme on voit, des résultats bien différens, la force relative étant constamment plus grande dans la premiere que dans la seconde; mais elles ont cela de commun, que dans l'une & l'autre cette force diminue à mesure que la valeur de x augmente; c'est-à-dire, à mesure que la sphere présente un plus grand segment à l'action du fluide élastique, de sorte qu'à cet égard seulement, & supposant que ce fluide est toujours animé de la même force expansive, ce seroit un avantage réel de donner aux chambres des mortiers la plus petite ouverture possible: mais d'autres considérations empêchent que, dans la pratique, on ne puisse profiter de cet avantage: la principale est que la poudre ne s'enflamme que successivement; d'où il suit que la forme de la chambre doit être tellement combinée avec son ouverture, que celle-ci restant aussi petite qu'il est possible,

celle-là procure en même temps l'inflammation la plus prompte & la plus complète : car il est certain , d'après la théorie qu'on vient d'exposer , que si la charge de poudre étoit entièrement enflammée , & le fluide élastique totalement développé , avant que la bombe fût ébranlée , une moindre ouverture seroit préférable à une plus grande , & la figure de la chambre seroit indifférente.

Nous ne connoissons point assez la nature de la poudre quant à sa maniere d'agir & au temps qu'elle met à s'enflammer , pour pouvoir assujettir au calcul la combinaison dont on vient de parler. Un autre principe qui nous seroit nécessaire & qu'on ne connoit pas mieux , c'est la nature de la résistance des corps en vertu de leur force d'inertie : on sait bien que cette résistance est proportionnelle aux masses ; mais elle entraîne encore avec elle l'idée d'un temps employé par cette masse à résister à l'effort de la force motrice , sur-tout si cette force consiste dans la pression d'un ressort ou d'un fluide élastique ; & il est naturel de penser que ce temps augmente avec la masse du mobile. Appliquant ceci à une charge de poudre renfermée dans la chambre d'une arme à feu , on verra que l'inflammation y doit être d'autant plus complète , que la masse du mobile exposé à l'expansion du fluide , est plus grande. Si on connoissoit donc le temps de l'inflammation & le temps de la résistance du mobile , ou au moins leur rapport , on pourroit résoudre la question qui nous occupe ; au défaut de ces lumières qui nous manquent , employons le seul moyen qui soit en notre pouvoir , celui de la comparaison de différentes chambres contenant la même quantité de poudre , en nous appuyant de deux principes suivans : 1°. le feu mis à

une charge de poudre par un point quelconque , que nous appellerons centre d'inflammation , se communique de proche en proche à toute la charge , en s'étendant sphériquement ; de manière que dans deux charges , les quantités de poudre allumées dans le même premier instant , feront des portions de sphères égales. 2°. Plus il y aura de poudre allumée au premier instant de l'inflammation , plus le feu gagnera promptement le reste de la charge.

Cela posé pour comparer les effets de deux chambres , ayant la même capacité & des formes différentes , on imaginera deux sphères égales placées de manière que leurs centres soient aux mêmes points que les centres d'inflammation ; observant , pour le choix de leur rayon , que les portions de ces sphères renfermées dans les chambres n'excèdent point le volume des charges. On examinera quelle est la chambre qui comprend entre ses parois , & dans le volume de la charge , la plus grande portion de sphère ; c'est dans celle-là que s'enflammera , au même instant , la plus grande quantité de poudre , où , par conséquent l'inflammation de la charge sera la plus complète ; & si à cette condition la même chambre joint encore celle d'une moindre ouverture , on pourra conclure qu'il en résultera aussi la plus forte impulsion du fluide contre la bombe.

On voit donc que la position de la lumière doit influer sur la promptitude de l'inflammation d'une charge de poudre : il est clair en effet qu'étant placée vers le milieu de la longueur de la charge , il s'enflammera au même instant à peu près autant de poudre du côté du fond de la chambre que du côté de l'ouverture ; c'est-à-dire , si la chambre est cylindrique , environ le double de ce qui s'en enflammeroit si la lumière aboutit à l'angle du fond.

Il n'est pas moins évident que si la lumière répond au milieu du fond de la chambre, il s'enflammera d'autant plus de poudre au premier instant, que ce fond est plus applati. Mais si, par la manière de placer la lumière, on obtient une inflammation plus ou moins prompte, d'un autre côté il a été observé, dit-on, que quand elle est trop éloignée du fond de la chambre, l'explosion de la poudre est si violente, que le mortier & son affut en sont considérablement tourmentés & fatigués, sans qu'il en résulte à la bombe un surcroît de force bien sensible. Les nouveaux mortiers coniques viennent à l'appui de cette observation : dans celui de 12 po. la chambre, dont la profondeur est de 7 po. 9 li., contient 11 liv. de poudre ; la lumière répond à 3 po. du fond, & quoique les tourillons aient 8 po. de diamètre, on a été obligé, pour les empêcher de fléchir sous l'effort de cette charge, de les assurer par un renfort en forme de console de 4 po. de base & 8 po. de hauteur. Si ces mortiers, à cause de la forme conique du logement de la bombe, ont l'avantage de la justesse de direction, ils le cedent pour la portée aux mortiers ordinaires, à chambre poire ou cylindrique, dont le diamètre de l'ouverture est de 5 po. 6 li., tandis que dans le mortier conique elle est de 11 po. 5 li. 9 pts. ; ce qui met la force relative d'une charge de poudre dans celui-ci, & la force relative de la même charge dans l'autre, dans le rapport de 702 à 944. Il est certain au reste qu'avec des petites charges, les portées du mortier conique sont beaucoup moindres que celles du mortier ordinaire : 2 liv. de poudre avec le premier n'ont donné qu'une portée de 298 toises, & avec l'autre de 462 ; avec 2 $\frac{1}{2}$ liv. le premier a donné 400 toises, le second 569 ; de sorte que dans tous les

cas où l'usage des mortiers coniques ne seroit point borné, à leurs plus grandes portées, tant pour les sieges que pour la défense des côtes, il y auroit un avantage bien décidé à leur préférer les mortiers actuels, sur-tout si l'ame avoit la configuration dont nous avons parlé dans la note de l'art. 53.

L'observation sur l'éloignement de la lumière du fond de la chambre, fourniroit un sujet de discussion bien intéressant sur les effets de la poudre & sa maniere d'agir; mais on ne pourra s'en occuper d'une maniere satisfaisante, que lorsqu'on aura un assez grand nombre de faits bien vus & bien constatés. En attendant, nous allons terminer ces réflexions par une remarque, qui, en donnant une idée de la promptitude de l'inflammation de la poudre, fera voir qu'on doit en effet peu gagner à cet égard, en éloignant la lumière du fond de la chambre; cette remarque est fondée sur les résultats des épreuves faites avec les pieces de 24, pour connoître la force de différentes charges de poudre, rapportées dans la table VII, art. 172. Les charges éprouvées sont de 12 onces; 1 liv., $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, 5, 6, 8, 10 & 12 livres; elles ont communiqué au boulet des vitesses de 500, 575, 500, 809, 906, 989, 1065, 1132, 1250, 1320, 1425, 1475 & 1530 pieds par seconde; si les vitesses étoient proportionnelles aux racines quarrées des charges, comme cela seroit si dans toutes les charges l'inflammation étoit complete avant le départ du boulet, ces vitesses seroient de 500, 577, 707, 816, 913, 1000, 1080, 1155, 1291, 1414, 1633, 1826 & 2000 pi. par seconde; comparant ces dernières vitesses avec celles qui résultent des épreuves, on voit que la différence se réduit d'abord à peu de choses, & qu'elle ne commence à être sensible que pour

les charges qui excèdent 4 l. La conséquence que nous voulons tirer de cette comparaison, est que, si la charge de 12 onces, qui produit une vitesse de 500 pieds, est entièrement enflammée avant le départ du boulet, comme il n'est guere possible d'en douter, il faut nécessairement que toutes les autres charges, jusqu'à celle de 4 l. inclusivement, soient dans le même cas; puisque leur longueur n'excédant point leur diamètre, le feu doit se communiquer en même temps aux extrémités de l'un & de l'autre, & que d'ailleurs ces charges donnent toutes des résultats, à peu de chose près, conformes à ceux de la théorie. Or il est certain que la charge de 12 onces suffit pour chasser le boulet, quand même son poids seroit augmenté de toute la poudre qui est en avant de ces 12 onces; il faut donc que la communication de la flamme soit assez rapide pour qu'une charge de 2, 3 & 4 l. de poudre s'allume presque aussi promptement que celle de 12 onces; ce qui n'est au reste qu'une suite naturelle des deux principes établis plus haut. Si les charges plus fortes ne suivent pas la même loi, c'est qu'à raison d'une plus grande longueur, le temps de leur inflammation devient assez sensible pour que le boulet puisse être ébranlé & chassé par la première poudre enflammée; mais cette différence doit presque disparaître dans la chambre d'un mortier, à cause de la plus grande pesanteur du mobile, qui, par cette raison, opposant une résistance plus grande & plus longue, donne lieu à une inflammation plus complete. Nous avons déjà eu occasion de faire cette observation dans la remarque V, art. 177.

F I N.

E R R A T A.

PAGE 3, ligne 22, au lieu de EG, lisez FG.

Dans la fig. 11, il faut supposer la lettre C à l'extrémité de AQ, & la lettre B au point où la courbe rencontre AP, pag. 9, lig. 4, &c. & pag. 10, lig. 10, &c.

Pag. 18, lig. 8, au lieu de (§. 4), lisez (§. 5).

Pag. 21, lig. 19, au lieu de $\frac{b - ct}{bt + c}$, lisez $\frac{b - ct}{bt + c}$.

Pag. 22, lig. 14, au lieu de (§. 4) lisez (§. 5).

Ibid. lig. 15, au lieu de (§. 14) lisez (§. 13).

Ibid. lig. 22, au lieu de (§. 13), lisez (§. 12).

Pag. 23, lig. 16, au lieu de (§. 4), lisez (§. 5).

Pag. 29, lig. 1^{re}. au lieu de *du Corps royal de l'artillerie*, lisez *du Corps de l'artillerie*.

Pag. 31, lig. 3, au lieu de (§. 33), lisez (§. 34).

Ibid. lig. 4, au lieu de (§. 33), lisez (§. 34).

Pag. 32, lig. 26, au lieu de (§. 38), lisez (§. 39).

Pag. 33, lig. 11, au lieu de *le moblie*, lisez *le mobile*.

Pag. 36, lig. 2, au lieu de (§. 38), lisez (§. 39).

Dans la fig. 16, planche II, il faut supposer la ligne *Hi* parallèle à AB & rencontrant GA en *i*, comme il est dit pag. 48, lig. 12.

Pag. 48, lig. 29, au lieu de (§. 4), lisez (§. 5).

Pag. 53, lig. 3, au lieu de *deux secondes*, lisez *une seconde*.

Ibid. lig. 6, au lieu de *premiere table*, lisez *seconde table*.

Pag. 55, lig. 4, au lieu de (§. 4), lisez (§. 5).

Pag. 57, lig. 20, au lieu de (§. 71), lisez (§. 72).

Pag. 59, table V, colonne 7, lig. 23, au lieu de
2 — S, lisez 2 — 8.

Pag. 66, lig. 22, au lieu de (§. 27), lisez (§. 28).

Ibid. dern. lig. au lieu de (§. 4), lisez (§. 5).

Pag. 67, lig. pénultième, au lieu de (fig. 24), lisez
(fig. 25).

Pag. 75, lig. 2, au lieu de (§. 33), lisez (§. 34).

Pag. 79, lig. 5, au lieu de (§. 33), lisez (§. 34).

Pag. 99, lig. 6, au lieu de (§. 113), lisez (§. 119).

Pag. 110, lig. 12, au lieu de $m = c \frac{x}{c}$, lisez $m = c \frac{x}{c}$.

Ibid. lig. 13, au lieu de $c \frac{x}{c}$, lisez $c \frac{x}{c}$.

Pag. 112, lig. 17, au lieu de (§. 70), lisez (§. 71).

Pag. 117, lig. 14, au lieu de (§. 145), lisez (§. 147).

Pag. 118, lig. 19, au lieu de (§. 81), lisez (§. 82).

Pag. 120, lig. 22, au lieu de *senfile*, lisez *sensible*.

Pag. 126, lig. 12 & 13, au lieu de

$$x^4 + 2cx^3 + c^2x^2 - \frac{2ncV^2x}{g} + \frac{c^2V^4}{gg} = 0$$

$$- \frac{2cV^2x^3}{g^n} - \frac{c^2V^2x^2}{g^n} - \frac{nc^2V}{g}, \text{ lisez}$$

$$x^4 + 2cx^3 + c^2x^2 - \frac{2ncV^2x}{g} + \frac{c^2V^4}{gg} = 0$$

$$- \frac{2cV^2x^3}{g^n} - \frac{c^2V^2x^2}{g^n} - \frac{nc^2V}{g}.$$

Pag. 127, lig. 2, au lieu de $\sqrt[3]{\frac{Vq}{q+p}}$, lisez

$$\frac{\sqrt[3]{q}}{\sqrt[3]{q+p}}.$$

Pag. 129, lig. 29, au lieu de (§. 130), lisez (§. 127).

Pag. 131, lig. 6, au lieu de 100, 130, lisez 150, 130.

Pag. 168, lig. 3, au lieu de *qui cette vitesse*, lisez *que
cette vitesse*.

Pag. 180, lig. 28, au lieu de *hauffe*, lisez *la hauffe*.

Pag. 185, lig. 20, au lieu de *bataillons de royal artillerie*, lisez *bataillons de l'artillerie*.

Pag. 189, lig. 13, au lieu de (§. 148), lisez (§. 150).

Pag. 200, lig. 5, au lieu de *qui fi à cette distance*, lisez *que fi à cette distance*.

Pag. 203, lig. 17, au lieu de (§. 128), lisez (§. 130).

Pag. 204, lig. 20, au lieu de $dt = \frac{d t}{\sqrt{x}}$, lisez $dt = \frac{d S}{\sqrt{x}}$.

Pag. 205, lig. 5, au lieu de $\frac{2 d d x}{d t^2} = \frac{-d x^2 \sqrt{(1-p p)}}{c d t^2}$, lisez $\frac{2 d d x}{d t^2} = \frac{-d x^2 \sqrt{(1+p p)}}{c d t^2}$.

Ibid. lig. 6, au lieu de $k = \frac{p d x \sqrt{(1+p p)}}{c d t^2}$, lisez $k = \frac{p d x^2 \sqrt{(1+p p)}}{c d t^2}$.

Ibid. lig. 7, au lieu de $\frac{2 d x d p}{c d + t^2} = k$, lisez $\frac{2 d x d p}{c d t^2} = k$.

Ibid. lig. 12, au lieu de *multipliée par $d p$* , lisez *multipliée par $2 d p$* .

Ibid. lig. 14, au lieu de $2 C \frac{2}{c} f d p \sqrt{(1+p p)}$, lisez $2 C + \frac{2}{c} f d p \sqrt{(1+p p)}$.

Pag. 206, lig. 26, au lieu de $Q N = c \int \frac{p d p}{n-p}$, lisez $Q N = c \int \frac{p d p}{n-p}$.

Pag. 207, lig. 19, au lieu de $\frac{d S^3}{-d x d d x}$, lisez $\frac{d S^3}{-d x d d y}$.

Pag. 210, lig. 6, au lieu de *ne sont point intégrales*, lisez *ne sont point intégrables*.

Pag. 224, tab. XIV, en tête de la quatrième colonne, au lieu de 2,302585 $\sqrt{2 g}$, lisez 2,302585 $\sqrt{\frac{c}{2 g}}$.

Pag. 227, lig. antépénultième, au lieu de *quatre demi-terme*, lisez *quatre derniers termes*.

Pag. 251, ligne pénultième, au lieu de *entièrement ferme*, lisez *entièrement fermé*.



553127

TABLES
DU TIR
DES CANONS
ET
DES OBUSIERS.

